[Scientific journal of the Fergana State University](https://uzjournals.edu.uz/fdu)

Volume 1 *Scientific journal of the Fergana State University "FarDU.Ilmiy xabarlari" 3/2018* Article 2

8-15-2018

Problem with Bitsadze-Samarski and integral conditions for an ordinary differential equation

M. ABDUMANNOPOV
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@mail.ru

Recommended Citation

ABDUMANNOPOV, M. (2018) "Problem with Bitsadze-Samarski and integral conditions for an ordinary differential equation," *Scientific journal of the Fergana State University*: Vol. 1 , Article 2.
DOI: 517.927
Available at: https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol1/iss3/2

УДК 517.927

ИККИНСНИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНТSИАЛ ТЕНГЛАМА УСНУН БИТSАДЗЕ-САМАРСКИЙ ВА БИРИНСНИ ТУР ИНТЕГРАЛ SHАРТЛИ МАСАЛА
ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА И УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
PROBLEM WITH BITSADZE-SAMARSKI AND INTEGRAL CONDITIONS FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

М.Абдуманнопов

Аннотаtsuya

Уshбу мақолада иккинсhи тартибли оддий дифферентsиал тенглама усhун Бuтsадзе-Самарский shартли ва биринсhи тур интеграл shартли масала ўрганилган.

Аннотаtsuya

В настоуаоʼей работе изусhена задасhа с интегралдʼнqм условием первого рода и условием Бuтsадзе-Самарского длуа простого дифферентsиалдʼного уравнениуа второго поруадка.

Annotation

In the paper, a problem with Bitsadze-Samarski condition and first-type integral condition for the second order ordinary differential equation is studied.

Тауансh сўз ва иборалар: *дифферентsиал тенглама, сhегаравий масала, Бuтsадзе-Самарский shарти, интеграл shарти, интеграл тенглама.*

Клюсhевqе слова и вqражениуа: *дифферентsиалдʼное уравнение, краевауа задасhа, условие Бuтsадзе-Самарского, интегралдʼное условие, интегралдʼное уравнение.*

Keywords and expressions: *differential equation, boundary-value problem, Bitsadze-Samarski condition , integral condition, integral equation.*

Иккинсhи тартибли сhизиқли уshбу

$$y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=f(x), \qquad x\in(-1,1) \tag{1}$$

дифферентsиал тенгламани қарайлик, бу ерда $b(x), c(x), f(x)$ -берилган узлуксиз функтsиуалар, $y=y(x)$ -номаълум функтsиуа.

BSI масала. (1) тенгламанинг $C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$ синфга тегиshли shундай есhими топилсинки, у

$$y(-1)=\alpha y(\eta)+k_1, \tag{2}$$

$$\int_\beta^1 y(\xi)d\xi=k_2 \tag{3}$$

shартларни қаноатлантирсин, бу ерда η,α , k_1 ва k_2 - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\eta,\beta\in(-1,1), \eta<\beta$.

$\eta\in(-1,1)$ бўлганлиги усhун $\alpha\neq 0$ бўлганда (1.11)-Бuтsадзе-Самарский shарти бўлади. Одатда (3) кўриниshдаги тенглик 1-тур интеграл shарт, дейилади [1.164].

1-лемма. *Агар (x_0,x_1) оралиқда $c(x)<0$ тенгсизлик бажарилса,*

$$y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0 \quad x\in(x_0,x_1) \tag{1'}$$

бир жинсли тенгламанинг есhими (x_0,x_1) оралиқда мусбат максимум ва манфий минимумга эриshмайди.

Исбот. Фараз қилайлик $(1')$ тенгламанинг $y(x)$ есhими $x=z\in(x_0,x_1)$ нуқтада мусбат максимумга (манфий минимумга) эриshсин. У ҳолда

__М.Абдуманнопов__ – ФарДУ физика-математика факультети 4-курс талабаси.

$y''(z) \le 0(\ge 0),\ y'(z) = 0$, $c(z)y(z) < 0(> 0)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Булардан қуйидаги тенгсизликнинг ҳам ўринли эканлиги келиб сhиқади:

$$y''(z) + b(z)y'(z) + c(z)y(z) < 0(> 0).$$

Бу эса $(1')$ тенгламага зиддир. Демак, фаразимиз нотўғри. 1-лемма исботланди.

2-лемма. *Агар* $g(x)$ *функтsиуа* $[x_0, x_1]$ *сегментда узлуксиз бўлиб,*

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx = 0 \tag{4}$$

тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда sҳундай $z \in (x_0, x_1)$ *сон мавжудки,* $g(z) = 0$ *тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. Агар $[x_0, x_1]$ сегментда $g(x) \ge 0$ ёки $g(x) \le 0$ бўлса, (4) тенглик ўринли бўлмайди. Фараз қилайлик, (4) тенглик бажарилсин.Унда 2 та ҳол бўлиsҳи мумкин: 1) $g(x) \equiv 0$, $x \in [x_0, x_1]$. Бунда теорема исбот бўлади ва z сифатида (x_0, x_1) оралиқдаги ихтиёрий сонни олиsҳ мумкин. 2) $g(x)$ - $[x_0, x_1]$ сегментда иsҳораси алмаsҳинувсhи функтsиуа. Унда $g(x) \in C[x_0, x_1]$ бўлганлиги уchун sҳундай $z \in (x_0, x_1)$ сон мавжуд бўладики, бунда $g(z) = 0$ тенглик ўринли бўлади. 2-лемма исботланди.

3-лемма. *Агар* $c(x) < 0$*,* $x \in (-1, x_0)$ *ва* $|\alpha| \le 1$ *тенгсизликлар ўринли бўлса,*

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \qquad x \in (-1, x_0); \tag{5}$$

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad y(x_0) = 0 \tag{6}$$

масала фақат тривиал есhимга эга бўлади.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик: $\{(5),(6)\}$ масала $y(x) \not\equiv 0,\ x \in [-1, x_0]$ есhимга эга бўлсин, у ҳолда, Вейерsҳтрасс теоремасига асосан $[2]$, sҳундай $z \in [-1, x_0]$ сон мавжудки, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$\sup_{[-1, x_0]} |y(x)| = |y(z)| > 0.$$

1-леммага кўра $z \notin (-1, x_0)$. (6) тенгликларнинг иккинсhисига асосан эса $z \ne x_0$. Демак, $z = -1$. У ҳолда $|y(\eta)| < |y(-1)|$ бўлиб, (6) дан $|y(-1)| = |\alpha y(\eta)| \le |y(\eta)| < |y(-1)|$ кўриниsҳдаги нотўғри тенгсизлик келиб сhиқади. Бу қарама-қарsҳиликдан эса фаразимизнинг нотўғрилиги келиб сhиқади. Демак, $y(x) \equiv 0,\ x \in [-1, x_0]$. 3-лемма исботланди.

4-лемма. *Агар* $c(x) < 0$*,* $x \in (x_0, x_1)$ *ва* $|\alpha| \le 1$ *тенгсизликлар ўринли бўлса,*

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \qquad x \in (x_0, x_1); \tag{7}$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_1) = 0 \tag{8}$$

масала фақат тривиал есhимга эга бўлади.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик: $\{(7),(8)\}$ масала $y(x) \not\equiv 0,\ x \in [x_0, x_1]$ есhимга эга бўлсин, у ҳолда sҳундай $z \in [x_0, x_1]$ сон мавжудки, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади [2.416]:

$$\sup_{[x_0, x_1]} |y(x)| = |y(z)| > 0.$$

(8) тенгликларга асосан $z \neq x_0$, $z \neq x_1$, демак, $z_1 \in (x_0, x_1)$. Буни эътиборга олсак, $x = z$ бўлганда $y(x)$ функtsiya мусбат максимумга ёки манфий минимумга эга бўлади. 1-леммага асосан эса бундай бўлишhи мумкин эмас. Бу қарама-қарshиликлардан фаразимизнинг нотўғрилиги келиб chиқади. Демак, $y(x) \equiv 0,\ x \in [x_0, x_1]$. 4 - лемма исботланди.

1-теорема. *Агар* $c(x) < 0$, $x \in (-1,1)$ *ва* $|\alpha| \leq 1$ *тенгсизликлар бажарилса, BSI масала биттадан ортиқ echимга эга бўлмайди.*

Исбот. BSI масаланинг $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ echимлари мавжуд деб, тескаридан фараз қилайлик.Унда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функtsiya

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0,\ x \in (-1,1); \tag{9}$$

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad \int_\beta^1 y(x)dx = 0 \tag{10}$$

shартларни қаноатлантиради.

(10) тенгликларнинг иккинchисини эътиборга олсак, 2-леммага асосан $\tau_1 \in (\beta, 1)$ сон мавжудки, $y(\tau_1) = 0$ тенглик ўринли бўлади.

У ҳолда 3-леммага асосан (9) тенгламанинг $[-1, \tau_1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги shартларни

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad y(\tau_1) = 0 \tag{11}$$

демак, (10) shартларни қаноатлантирувchи echими $y(x) \equiv 0,\ x \in [-1, \tau_1]$.

Буни эътиборга олсак, $\{(9),(10)\}$ масаладан

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in (\tau_1, 1);$$

$$y(\tau_1) = 0, \quad \int_{\tau_1}^1 y(x)dx = 0$$

масала келиб chиқади.

Юқоридаги мулоҳазани бу масалага қўлласак, уана shундай $\tau_2 \in (\tau_1, 1)$ сонлар мавжудки, $[\tau_1, \tau_2]$ сегментда $y(x) \equiv 0$ деган хулосага эга бўламиз.

SHу жараённи кетма-кет такрорлаб, $[-1,1]$ оралиқда ётувchи shундай $[-1,\tau_1],[\tau_1,\tau_2],[\tau_3,\tau_4],...[\tau_{n-1},\tau_n],...$ сегментлар кетма-кетлигига эга бўламизки, бунда $y(x) \equiv 0,\ \ x \in [\tau_{n-1}, \tau_n]\ \ n = 1,2,...$(бу ерда $\tau_0 = -1$) ва $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 1$ тенгликлар ўринли бўлади. Булардан эса, $y(x)$ функtsiyанинг $[-1,1]$ сегментда узлуксизлигига асосан, $y(x) \equiv 0$, $x \in [-1,1]$ эканлиги келиб chиқади. Демак, $y_1(x) \equiv y_2(x),\ x \in [-1,1]$. 1-теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 1-теорема shартлари ва* $b(x) \in C^1[-1,1]$, $3 - \beta(2+\beta) + \alpha(\beta^2 - 1) + 2\alpha\eta(1-\beta) \neq 0$ *shартлар бажарилган бўлса, BSI масаланинг echими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x), \quad x \in (-1,1) \tag{12}$$

кўринишhда ёзиб олайлик, бу ерда $f_1(x) = f(x) - b(x)y'(x) - c(x)y(x)$.

Маълумки [1], (12) тенгламанинг echими учун,

$$y(x) = \frac{1}{2}y(-1)(1-x) + \frac{1}{2}y(1)(1+x) + \int_{-1}^1 G(x,t)f_1(t)dt,\ x \in [-1,1] \tag{13}$$

тенглик ўринли бўлади.

(13) тенгликка $f_1(x)$ функtsиуанинг ифодасини қўйиб, сўнгра $y'(t)$ иshтирок этган ҳадни бўлаклаб интегралласак,

$$y(x)=\frac{1}{2}y(-1)(1-x)+\frac{1}{2}y(1)(1+x)+\int_{-1}^{1}G(x,t)f(t)dt+$$
$$+\int_{-1}^{1}y(t)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[b(t)G(x,t)\right]-c(t)G(x,t)\right\}dt \tag{14}$$

тенгликка эга бўламиз.

$y(x)$ функtsиуанинг бу ифодасини (2) ва (3) shартларга қўуамиз. Натижада $y(-1)$ ва $y(1)$ номаълумларга нисбатан қуйидаги

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\eta}{2}\right)y(-1)-\frac{\alpha}{2}(1+\eta)y(1)=k_1+$$
$$+\alpha\left[\int_{-1}^{1}G(\eta,t)f(t)dt+\int_{-1}^{1}y(t)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[b(t)G(\eta,t)\right]-c(t)G(\eta,t)\right\}dt\right],$$
$$\frac{1}{4}\left(1-\beta\right)^2y(-1)+\frac{1}{4}\left(3-2\beta-\beta^2\right)y(1)=k_2-$$
$$-\int_{-1}^{1}\int_{\beta}^{1}G(\xi,t)f(t)\,d\xi\,dt-\int_{-1}^{1}\int_{\beta}^{1}y(t)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[b(t)G(\xi,t)\right]-c(t)G(\xi,t)\right\}d\xi\,dt \tag{15}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Теорема shартига асосан (15) тенгламалар системасининг асосий детерминанти нолдан фарқли. SHунинг учун унинг еchими мавжуд ва уагона. $y(-1)$ ва $y(1)$ ларнинг (15) дан топилган қийматларини (14) тенгликка қўйиб, баъзи shакл алмashтириshлардан сўнг, $y(x)$ номаълум функtsиуага нисбатан

$$y(x)-\int_{-1}^{1}K_2(x,t)y(t)dt=\Phi_2(x),\qquad x\in(-1,1) \tag{16}$$

кўриниshдаги иккинchи тур Фредголд'м интеграл тенгламасига [3] эга бўламиз,бу ерда $K_2(x,t)$ - бўлакли узлуксиз ва chегараланган маълум функtsиуа, $\Phi_2(x)$ эса $C^2[-1,1]$ синфга тегиshли маълум функtsиуа.

(16) интеграл тенглама қўйилган BSI масалага эквивалент бўлиб, унга мос бир жинсли интеграл тенглама $\{(9),(10)\}$ масалага эквивалентдир. Охирги масала фақат тривиал еchимга эга бўлгани учун (16) интеграл тенгламага мос бир жинсли тенглама ҳам фақат тривиал еchимга эга. У ҳолда, Фредголд'м алд'тернативасига асосан [3.256], интеграл тенгламанинг еchими мавжуд ва уагона. 2-теорема исботланди.

References:

1. O'rinov A.Q. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. – T.: "MUMTOZ SO'Z", 2014.
2. Azlarov T., Mansurov X.. Matematik analiz. – T.: "O'qituvchi", 1994.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. – T.: "Yangiyul polygraph service", 2007.

(Тақризchи: А.Ўринов, физика-математика фанлари доктори, профессор).