Scientific reports of Bukhara State University

Volume 2
Issue 1 *BSU 2019 issue 1*

Article 1

3-27-2019

ON THE VIRTUAL LEVELS OF ONE FAMILY MATRIX OPERATORS OF ORDER 2

Элёр Бахтиёрович Дилмуродов
базовый докторант БухГУ

PHYSICAL SCIENCES AND MATHEMATICS: MATHEMATICS

УДК 517.984

2-ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАЛАР ОИЛАСИНИНГ ВИРТУАЛ САТҲЛАРИ ҲАҚИДА

О ВИРТУАЛЬНЫХ УРОВНЯХ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА 2

ON THE VIRTUAL LEVELS OF ONE FAMILY MATRIX OPERATORS OF ORDER 2

Дилмуродов Элёр Бахтиёрович
базовый докторант БухГУ

Таянч сўзлар: операторли матрица, умумлашган Фридрихс моделлари оиласи, хос қиймат, виртуал сатҳ, пайдо қилиш ва йўқотиш операторлари, Фредгольм детерминанти, Шур тўлдирувчиси.

Ключевые слова: операторная матрица, семейства обобщенных моделей Фридрихса, собственное значение, виртуальный уровень, операторы рождения и уничтожения, определитель Фредгольма, дополнение Шура.

Key words: operator matrix, family of a generalized Friedrichs models, eigenvalue, virtual level, creation of birth and annihilation operators, Fredholm determinant, Schur complement.

Аннотация

Мақолада пайдо қилиш ва йўқотиш операторлари ёрдамида таъсирлашувчи, Z^3 панжарада уч ўлчамли кўпи билан иккита заррачалар системаси Гамильтонианига мос $\mathcal{A}_\mu(k),\, k\in T^3:=(-\pi,\pi]^3,\ \mu>0$ 2-тартибли операторли матрицалар оиласи (умумлашган Фридрихс моделлари оиласи) қаралади. Бирор μ_0 сони учун барча $k\in T^3$ларда $\mathcal{A}_{\mu_0}(k)$ оператор хос қийматларга эга эмаслиги кўрсатилган. Мос Фредгольм детерминанти учун ёйилмалар олинган.

Аннотация

В настоящей работе рассматривается семейство операторных матриц порядка 2 (семейства обобщенных моделей Фридрихса) $\mathcal{A}_\mu(k),\, k\in T^3:=(-\pi,\pi]^3,\ \mu>0$, ассоцииро-ванное с Гамильтонианом системы, состоящей из не более двух частиц на трехмерной решетке Z^3, и взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения. При некотором μ_0 установлено отсутствие собственных значений оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}(k)$ для всех $k\in T^3$. Получены разложения, соответствующие определителю Фредгольма.

Abstract

This article considers a family of order 2 matrix operators (a family of generalized Friedrichs models) $\mathcal{A}_\mu(k),\, k\in T^3:=(-\pi,\pi]^3,\ \mu>0$, associated with the Hamiltonian system consisting of no more thant two particles on a three-dimensional lattice Z^3, interacting via creation and annihilation operators. We establish the absence of the eigenvalues of $\mathcal{A}_{\mu_0}(k)$ for all values of k for some μ_0. The decompositions corresponding to the Fredholm determinant are obtained.

Введение. Пороговые явления для двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера изучены в [1, 2]. Семейства модели Фридрихса с одномерным возмущением, которые ассоциированы с системой двух частиц на трехмерной решётке Z^3, изучены в [3, 4]. Как известно, некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической механики и гидродинамики, сводятся к исследованию виртуальных уровней обобщённой модели Фридрихса [5,6]. Поэтому изучение виртуальных уровней для обобщённой модели Фридрихса играет важную роль в современной математической физике.

В настоящей работе рассматриваются семейства операторных матриц порядка 2 (семейства обобщенных моделей Фридрихса) $\mathcal{A}_\mu(k)$, в случае функций специального вида w_0 и w_1, являющиеся параметрами рассматриваемого семейства. Устанавливается, что эти функции имеют невырожденный минимум (невырожденный максимум) в единственной точке $\bar{0} \in T^3$ и $(\bar{0},\bar{0}) \in (T^3)^2$, соответственно ($\bar{\pi} \in T^3$ и $(\bar{\pi},\bar{\pi}) \in (T^3)^2$), где $\bar{0} := (0,0,0)$ и $\bar{\pi} := (\pi,\pi,\pi)$.

Получены следующие результаты:

- построено первое дополнение Шура;

- найдено критическое значение μ_0 параметра μ, а оператор $\mathcal{A}_{\mu_0}(\bar{0})$ ($\mathcal{A}_{\mu_0}(\bar{\pi})$) имеет виртуальный уровень в точке $z=0$ ($z=18$);

- установлено, что при всех $k \in T^3$ оператор $\mathcal{A}_{\mu_0}(k)$ не имеет собственных значений, лежащих вне отрезка $[0;18]$, где $\min\limits_{k\in T^3} \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = 0$, $\max\limits_{k\in T^3} \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = 18$;

- получены разложения определителя Фредгольма при малых значениях $|p|$ и $|p-\bar{\pi}|$, соответственно.

Результаты настоящей работы являются обобщениями соответствующих результатов [1-6]. Точнее в данной работе исследуется виртуальный уровень не только в точке $z=0$, но одновременно и в точке $z=18$.

Семейства обобщеных моделей Фридрихса. Пусть C, R и Z - множество всех комплексных, вещественных и целых чисел, соответственно, а T^3 - трехмерный тор, т.е. куб $(-\pi,\pi]^3$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе T^3 рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в R^3 по модулю $(2\pi Z)^3$.

Пусть $L_2(T^3)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекс-нозначных) функций, определенных на T^3. Обозначим через H прямую сумму пространств $H_0 := C$ и $H_1 := L_2(T^3)$, т.е. $H := H_0 \oplus H_1$.

Известно, что всякий линейный ограниченный оператор в $H_0 \oplus H_1$ записывается как операторная матрица порядка 2. В данной работе рассмотрим одну из таких операторных матриц, так называемую обобщенную модель Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$, $k \in T^3$, действующую в H как

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где операторы $A_{ii}(k): H_i \to H_i, i=0,1,\ k \in T^3$ и $A_{01}: H_1 \to H_0$ определяются по формулам

$$A_{00}(k) f_0 = w_0(k) f_0,\ A_{01} f_1 = \int_{T^3} f_1(t)dt,\ (A_{11}(k) f_1)(p) = w_1(k,p) f_1(p).$$

Здесь $f_i \in H_i, i = 0,1$, μ - вещественное положительное число, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot)$ имеют вид $w_0(k) := \varepsilon(k) + 6,\ w_1(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon(\frac{1}{2}(k+p)) + \varepsilon(p),$ где функция (дисперсии) $\varepsilon(\cdot)$ задается выражением $\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos k_i),\ k = (k_1,k_2,k_3) \in T^3.$

В этих предположениях параметры семейства операторов $\mathcal{A}_\mu(k), k \in T^3$, действующих в гильбертовом пространстве H по формуле (1), ограничены и самосопряжённы.

Оператор A_{01} называется оператором уничтожения, а A_{01}^* - оператором рождения [7] и $(A_{01}^* f_0)(p) = \mu f_0$, $f_0 \in H_0$.

Далее под $\sigma(\cdot), \sigma_{ess}(\cdot)$, $\sigma_{disc}(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ будем понимать соответственно спектр, существенный спектр, дискретный спектр и резольвентное множество некоторого ограниченного самосопряженного оператора.

Очевидно, что оператор возмущения $\mathcal{A}_\mu(k) - \mathcal{A}_0(k)$ оператора $\mathcal{A}_0(k)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля [8] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_0(k)$. Известно, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0(k)) = [m(k), M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом: $m(k) := \min_{p\in T^3} w_1(k,p), \quad M(k) := \max_{p\in T^3} w_1(k,p).$

Из последних фактов следует, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ не зависит от μ и имеет место равенство $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = [m(k), M(k)]$.

При каждом фиксированном $k \in T^3$ определим регулярную в области $C \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$ функцию $I(k;z) := \int_{T^3} \frac{dt}{w_1(k,t) - z}$.

Следует отметить, что функция $\Delta_\mu(k;z) := w_0(k) - z - \mu^2 I(k;z)$ обычно называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с оператором $\mathcal{A}_\mu(k)$.

Первое дополнение Шура. Вместе с оператором $\mathcal{A}_\mu(k)$ рассмотрим оператор, который известен под названием дополнение Шура.

Первый из них имеет следующий вид : $S_\mu(k;z): H_0 \to H_0$;

$$S_\mu(k;z) := A_{00}(k) - z - \mu^2 A_{01}(A_{11}(k) - z)^{-1} A_{01}^*,\ \ z \in \rho(A_{11}(k)).$$

Простые вычисления показывают, что оператор $S_\mu(k;z)$ можно определить следующим образом: $S_\mu(k;z) f_0 = \Delta_\mu(k;z) f_0, \quad z \in \rho(A_{11}(k)), \quad f_0 \in H_0.$

Видно, что первое дополнение Шура является операторнозначной регулярной функцией, определенной вне спектра оператора $A_{11}(k)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов $\mathcal{A}_\mu(k)$ и $S_\mu(k;z)$.

Лемма 1. *При каждом фиксированном* $k \in T^3$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(k)$ *имеет собственное значение* $z \in C \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$ *тогда и только тогда, когда число 0 является собственным значением оператора* $S_\mu(k;z)$.

Можно легко проверить, что функция $w_1(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум (максимум) в точке $(\bar{0},\bar{0}) \in (T^3)^2$ $((\bar{\pi},\bar{\pi}) \in (T^3)^2)$ и

$$\min_{k,p \in T^3} w_1(k,p) = w_1(\bar{0},\bar{0}) = 0, \quad \max_{k,p \in T^3} w_1(k,p) = w_1(\bar{\pi},\bar{\pi}) = 18.$$

При этом функция $w_0(\cdot)$ также имеет единственный невырожденный минимум (максимум) в точке $\bar{0} \in T^3$ ($\bar{\pi} \in T^3$). Следовательно, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при каждом $\mu > 0$, $k \in T^3, z \in (-\infty,0] \cup [18,+\infty)$ оператор $S_\mu(k;z)$ хорошо определен и ограничен в H_0. В частности, существует конечный положительный предел $I(0;0) = \lim_{k \to \infty} I(k;0)$.

Основные результаты. Введем следующие обозначения: $\mu_0 := \sqrt{6} I^{-\frac{1}{2}}(0;0)$.

Теорема 1. *Верны следующие утверждения:*

1) операторы $S_\mu(\bar{0};0)$ *и* $S_\mu(\bar{\pi};18)$ являются нулевыми операторами тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_0$;

2) оператор $\mathcal{A}_{\mu_0}(k)$ *при всех* $k \in T^3$ *не имеет собственных значений в* $(-\infty,0) \cup (18,+\infty)$.

Пусть $C(T^3)$ $(L_1(T^3))$ – банахово пространство непрерывных (интегрируемых) функций, определенных на T^3.

Определение 1. *Говорят, что оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *(* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *) имеет виртуальный уровень в точке* $z = 0$ *(* $z = 18$ *), если число 1 является собственным значением оператора*

$$(G_\mu \psi)(p) = \frac{\mu^2}{6} \int \frac{\psi(t)dt}{\varepsilon(t) + \varepsilon(\frac{t}{2})}, \quad \psi \in C(T^3)$$

$$\left((\bar{G}_\mu \varphi)(p) = \frac{\mu^2}{6} \int \frac{\varphi(\bar{\pi} + t)dt}{\varepsilon(t) + \varepsilon(\frac{t}{2})}, \quad \varphi \in C(T^3) \right)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ *(* φ *) удовлетворяет условие* $\psi(\bar{0}) \neq 0$ *(* $\varphi(\bar{\pi}) \neq 0$ *).*

Заметим, что если оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ ($\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$)имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$ ($z = 18$), тогда решение уравнения $G_\mu \psi = \psi$ ($\bar{G}_\mu \varphi = \varphi$) равно (с точностью до константы) функции $\psi(p) = 1$, ($\varphi(p) = 1$).

Отметим, что в определении 1 требование наличия собственного значения $\lambda = 1$ оператора G_μ ($\bar{G}_\mu$) соответствует существованию решения уравнения $\mathcal{A}_\mu(\bar{0}) f = 0$

($\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}) f = 18 f$). А из условия $\psi(\bar{0}) \neq 0$ ($\varphi(\bar{\pi}) \neq 0$) следует, что решение f этого уравнения не принадлежит пространству H . Точнее, если оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ ($\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$) имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$ ($z = 18$), то элемент $f = (f_0, f_1)$, где

$$f_0 = const \neq 0, \quad f_1(p) = -\frac{\mu f_0}{\varepsilon(p) + \varepsilon(p/2)}$$

$$\left(f_0 = const \neq 0, \quad f_1(p) = \frac{\mu f_0}{12 - \varepsilon((p+\bar{\pi})/2) - \varepsilon(p)} \right),$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu(\bar{0}) f = 0$ ($\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}) = 18 f$) и $f_1 \in L_1(T^3)$.

Теорема 2. *Операторы* $\mathcal{A}_{\mu_0}(\bar{0})$ *и* $\mathcal{A}_{\mu_0}(\bar{\pi})$ *имеют виртуальный уровень в точке* $z = 0$ *и* $z = 18$, *соответственно.*

Теорема 3. *При каждом фиксированном* $f \in H_0 \setminus \{0\}$ *имеют место разложения:*

$$(S_{\mu_0}(k; z) f, f) = \| f \|^2 \frac{16\pi^2 \mu_0^2}{5\sqrt{5}} \sqrt{\frac{6}{5} |k|^2 - 2z} + O(|k|^2) + O(|z|), \ |k| \to 0, \ z \uparrow 0;$$

$$(S_{\mu_0}(k; z) f, f) = -\| f \|^2 \frac{16\pi^2 \mu_0^2}{5\sqrt{5}} \sqrt{\frac{6}{5} |k - \bar{\pi}|^2 + 2(18 - z)} + O(|k - \bar{\pi}|^2) + O(|z - 18|),$$

$$|k - \bar{\pi}| \to 0, \ z \downarrow 18.$$

Отметим, что теоремы 1-3 играют важную роль [5,6] при доказательстве бесконечности числа собственных значений, а также при получении асимптотики дискретного спектра соответствующей операторной матрицы порядка 3.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководи-телю доценту Расулову Т.Х. за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

REFERENCES

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians in lattice. Comm. Math. Phys. 262 (2006). – P. 91-115.
2. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5 (2004). – P. 743-772.
3. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. J. Math. Anal. Appl. 330 (2007). – P. 1152-1168.
4. Расулов Т.Х. Пороговые эффекты в спектре модели Фридрихса //Узб. матем. журнал. - 2013. - № 1. – С. 99-108.
5. AlbeverioS., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. DiscreteSpectrumAsymptotics. J. Stat. Physics, 127:2 (2007). – P. 191-220.
6. Rasulov T.X. O chisle sobstvennix znacheniy odnogo matrichnogo operatora //Sibirskiy matematicheskiy jurnal, 52:2. - 2011. - S. 400-415.
7. Fridrixs K.O. Vozmusheniya spektra operatorov v gilbertovom prostranstve. - M.: Mir, 1969. - S. 232.
8. Rid M., Saymon B. Metodi sovremennoy matematicheskoy fiziki. Analiz operatorov. - M.: Mir, 1982. - T. 4. - C. 396.