Scientific-technical journal

Volume 22 | Issue 2 Article 6

3-1-2018

MATHEMATICAL MODEL OF THE INTERRELATED HEAT AND MASS TRANSFER IN THE CONVECTIVE DRYING OF WET MATERIAL FOR A GIVEN LAW OF TEMPERATURE CHANGE OF THE COOLANT

B E. Khayriddinov

G G. Halimov

UDC 662.997

19. MATHEMATICAL MODEL OF THE INTERRELATED HEAT AND MASS TRANSFER IN THE CONVECTIVE DRYING OF WET MATERIAL FOR A GIVEN LAW OF TEMPERATURE CHANGE OF THE COOLANT

B.E. Khayriddinov [1], G.G. Halimov [1], D.Zh. Nurmatova [1]

[1] Karshi State University, Karshi, Uzbekistan

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОСВЯЗАННОГО ТЕПЛА-И МАССОПЕРЕНОСА ПРИ КОНВЕКТИВНОЙ СУШКЕ ВЛАЖНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЗАДАННОМ ЗАКОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ

Abstract. *In the work, a mathematical model of convective drying of fruits (in the form of a plate, a cylinder, a sphere) under the conditions of periodic thermal action (in solar drying installations), which is in good agreement with the experimental data, is obtained by a joint solution of the system of differential equations of grating and mass transfer, with appropriate boundary conditions.*
Key words: wet material, material heating, evaporation of moisture, change in aggregate composition, Laplace operator, heat and mass transfer conditions, boundary conditions, Fourier criterion, symmetry conditions, drying speed, system of equations.

Аннотация. *В работе совместным решением системы дифференциальных уравнений тепла-и массопереноса, с соответствующими краевыми условиями, получена математическая модель конвективной сушки фруктов (в форме пластины, цилиндра, шара) в условиях периодического теплового воздействия (в солнечных сушильных установках), которая хорошо согласуется с экспериментальными данными.*
Ключевые слова: влажный материал, нагрев материала, испарение влаги, изменение агрегатного состояния, оператор Лапласа, условия тепло-и массообмена, граничные условия, критерий Фурье, условия симметрии, скорость сушки, система уравнений.

Аннотация. *Ишда иссиқлик – масса алмашинув дифференциал тенгламаларини берилган чегаравий шартларида биргаликда ечиш натижасида (қуёш қуриткич қурилмаларида) даврий иссиқлик таъсири шароитларида (пластина, цилиндр, шар шаклидаги) меваларни конвектив қуритишнинг математик модели ишлаб чиқилган бўлиб, ҳисоблаш натижалари экспериментал тадқиқот натижаларига яхши мос келади.*
Таянч сўзлар: нам материал, материалнинг қизиши, намни буғланиши, агрегат ҳолатини ўзгариши, Лаплас оператори, иссиқлик-масса алмашинув шарти, чегаравий шартлар, Фурье критерияси, симметриклик шарти, қуритиш тезлиги, тенгламалар системаси.

При конвективной сушки влажный материал контактирует с сушильным агентом – горячим воздухом и получает от него тепло, которое необходимо на нагрев материала сушки и испарение влаги. Изменение агрегатного состояния массы связанного вещества (влаги) влияет на формирование температурного поля в высушиваемом материале. В свою очередь, изменение температурного поля создает термодиффузионный поток влаги, который либо способствует выносу влаги из тела, либо препятствует массопереносу, с градиентом концентрации влаги [1-6].

Для полной количественной оценки взаимообусловленной связи влияющих эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности при сушке влажных материалов, для составления математической модели этих процессов следует рассматривать дифференциальные уравнение системы взаимосвязанного тепло- и массопереноса, предложенной А.В.Лыковым, которая при отсутствии градиента общего давления, записывается в виде [1-2]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \tau} &= a_T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\varepsilon\rho}{c}\frac{\partial W}{\partial \tau},\\ \frac{\partial W}{\partial \tau} &= a_m\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)+a_m\delta\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)\end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

где ν параметр геометрической формы; $\nu = 0,1,2-$ соответственно для пластины, цилиндра и шара. Преобразуем оператор Лапласа [3] для пластины, цилиндра и шара:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}(r^\nu\frac{\partial W}{\partial r}), \quad (2)$$

тогда система (1) приводится к виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{a_T}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\nu\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\varepsilon\rho}{c}\frac{\partial W}{\partial \tau},\\ \frac{\partial W}{\partial \tau} &= \frac{a_m}{r^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^\nu\frac{\partial W}{\partial r})+\delta\frac{\partial}{\partial r}(r^\nu\frac{\partial T}{\partial r})\right]\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для однозначного определения температуры $T(r,\tau)$ и локального распределения удельного влагосодержания $W(r,\tau)$ внутри высушиваемого материала необходимо задать условия тепло- и массообмена на поверхности тело и начальные распределения потенциалов переноса:

$$\left[T(r,\tau)\right]_{\tau=0}=T_0, \qquad \left[W(r,\tau)\right]_{\tau=0}=W_0 \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda(\nabla T)_n+\alpha\left[T_{cp}-T(r,\tau)\right]_n-(1-\varepsilon)\rho q(\tau)=0\\ &\lambda`(\nabla W)_n+q`(\tau)=0\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Граничные условия (5) выписаны на основе теплового и массообменного баланса на поверхности высушиваемого материала [4,7].

Для тел в форме пластины, цилиндра и шара, направление градиента потенциала совпадает с направлением производной по текущей координате r и условия (5) выписываются в виде:

$$\begin{aligned}&\lambda(\frac{\partial T}{\partial r})_{r=R}=\alpha\left[T_{cp}-T(r,\tau)\right]_{r=R}-(1-\varepsilon)\rho q(\tau),\\ &\lambda`(\frac{\partial W}{\partial r})_{r=R}=-q`(\tau)\end{aligned} \quad (6)$$

Запишем систему уравнений (3), начальные и граничные условия (4), (6) в относительных координатах $\varepsilon_0=\frac{r}{R}$ и критериях подобия тепло -и массопереноса:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial F_0} &= \frac{1}{\varepsilon_0^\nu}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_0}(\varepsilon_0^\nu\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_0})+\frac{\varepsilon\rho\, a_T}{c}\frac{\partial W}{\partial F_0},\\ \frac{\partial W}{\partial F_0} &= Lu\left[\frac{1}{\varepsilon_0^\nu}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_0}(\varepsilon_0^\nu\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_0})+\frac{\delta}{\varepsilon_0^\nu}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_0}(\varepsilon_0^\nu\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_0})\right]\end{aligned}\right\}, \quad (7)$$

где $F_0 = \frac{a_T \tau}{R^2}$ – критерий Фурье, (критерий гомохронности переноса тепла), $Lu = \frac{a_m}{a_T}$ – критерий Лыкова, $F_{0m} = \frac{a_m \tau}{R^2} = \frac{a_m}{a_T} \cdot \frac{a_r \tau}{R^2} = Lu \cdot F_0$ – критерий гомохронности массосодержания.

Граничные условия в относительной координате $0 \le \varepsilon_0 = \frac{r}{R} \le 1,$ для цилиндра и шара и $-1 \le \varepsilon_0 = \frac{r}{R} = \frac{X}{R} \le 1$ для пластины толщиной $2R(-1 \le \varepsilon_0 \le 1),$ преобразуются к виду:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_0}\right)_{\varepsilon_0 = 1} = Bi\left[T_{cp} - T(\varepsilon_0, F_0)\right]_{\varepsilon_0 = 1} - \frac{(1-\varepsilon)R\rho q(\tau)}{\lambda},$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_0}\right)_{\varepsilon_0 = 1} = -\frac{Rq`(\tau)}{\lambda`} \tag{8}$$

где $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ - критерий Био.

Поскольку в задачах рассматриваются симметричные граничные условия, то для пластины достаточно найти поля потенциалов для $0 \le \varepsilon_0 \le 1$. При этом к граничным условиям (8) необходимо присоединить условия симметрии в середине пластины $\varepsilon_0 = 0,$ а для цилиндра и шара $\varepsilon_0 = 0,$ на оси и центре шара [6]:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_0}\right)_{\varepsilon_0 = 0} = 0, \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_0}\right)_{\varepsilon_0 = 0} = 0 \tag{9}$$

По аналогии со среднеинтегральной нестационарной физической величиной с локальным распределением по закону функции $F(\mu, \tau)$;

$$< F|\tau| >= \frac{\iiint\limits_{v} F(\mu, \tau) d\mu}{\iiint\limits_{v} d\mu} \tag{10}$$

Для среднеинтегральной температуры $T(r, \tau)$ и локального массосодержания $W(r, \tau)$ имеем:

$$< T(F_0) >= \frac{\nu + 1}{R^{\nu+1}} \int_0^R T(r, \tau)\, r^{\nu} dr = (\nu + 1) \int_0^1 T(\varepsilon_0, F_0) \varepsilon_0^{\nu} d\varepsilon_0 \tag{11}$$

$$< W(F_0) >= \frac{\nu + 1}{R^{\nu+1}} \int_0^R W(r, \tau) r^{\nu} dr = (\nu + 1) \int_0^1 W(\varepsilon_0, F_0)\, \varepsilon_0^{\nu} d\varepsilon_0 \tag{12}$$

Положим $T_{cp} = \varphi(F_0)$ - изменение во времени температуры горячего воздуха. Решим систему (7) при начальных и граничных условиях (4), (8) для случаев, когда можно предположить:

$$\alpha\left[T_{cp} - T(r, \tau)\right]_{r=R} = \alpha\left[T_{cp} - < T(\tau) >\right] \tag{13}$$

Для несвязанного уравнения переноса, т.е. для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода соотношение (13) практически точно выполняется для $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} \le 1.$

Умножим уравнения системы (7) на $(\nu + 1)\varepsilon_0^{\nu}$, проинтегрируем по ε_0 от 0 до 1, тогда с учетом (8), (9) получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{d<T(F_0)>}{dF_0}&=(v+1)Bi\left[\phi(F_0)-<T(F_0)>\right]-\frac{(v+1)(1-\varepsilon)\rho Rq(F_0)}{\lambda}+\frac{\varepsilon\rho a_T}{c}\frac{d<W(F_0)}{dF_0}\\ \frac{d<W(F_0)>}{dF_0}&=(v+1)LuBi\left[\phi(F_0)-<T(F_0)>\right]-\frac{(1-\varepsilon)\rho Rq(F_0)}{\lambda}-\frac{\delta Rq`(F_0)}{\lambda`}\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Откуда

$$\frac{d<T(F_0)>}{dF_0}=-(v+1)Bi\,(1+\frac{\delta\varepsilon\rho\ a_T Lu}{c})<T(F_0)>+Q(F_0)\,, \quad (15)$$

где

$$Q(F_0)=(v+1)Bi\,(1+\frac{\varepsilon\rho a_T\delta}{c}Lu)\phi(F_0)- \\ -\frac{(v+1)(1-\varepsilon)\rho R}{\lambda}(1+\delta)q(F_0)-\frac{(v+1)\varepsilon\rho a_T R}{c\lambda`}Lu\,q`(F_0) \quad (16)$$

Для стандартной задачи $y`(t)+by(t)=\psi(t),\ y(0)=y_0$
решением будет [5];

$$y(t)=y_0\exp(-bt)+\int_0^t\psi(\tau)\exp\left[-b(t-\tau)\right]d\tau \quad (17)$$

На основании этой формулы имеем:

$$<T(F_0)>=T_0\exp\left[-(v+1)Bi(1+\frac{\delta\varepsilon\rho a_T}{c}Lu)F_0\right]+ \\ +\int_0^{F_0}Q(\tau)\exp\left[-(v+1)Bi\,(1+\frac{\delta\varepsilon\rho a_T}{c}Lu)(F_0-\tau)\right]d\tau \quad (18)$$

Подставив значение (18) во второе уравнение системы (14), находим:

$$\frac{d<W(F_0)>}{dF_0}=(v+1)LuBi\phi(F_0)-\frac{(1-\varepsilon)\rho Rq(F_0)}{\lambda}- \\ -(v+1)LuBiT_0\exp\left[-(v+1)Bi(1+\frac{\delta\varepsilon\rho a_T}{c}Lu)F_0\right]+ \\ +\int_0^{F_0}Q(\tau)\exp\left[-(v+1)Bi(1+\frac{\delta\varepsilon\rho a_T}{c}-u)(F_0-\tau)\right]d\tau \quad (19)$$

которое определяет скорость сушки влажных материалов и форме, пластины, цилиндра и шара при заданных значениях $q(F_0),\ q`(F_0)\quad u\ \ \varphi(F_0)$.

Определим скорость сушки при постоянных тепловых режимах.

Предположим, что $\varphi(F_0)=T_c=const$, $(T_e>T_0)$, $q(F_0)=q`=const$, $\quad q`(F_0)=q=const$.

Тогда по формуле (18) находим:

$$<T(F_0)>=T_0\exp\left[-(v+1)Bi\,(1+\frac{\delta\varepsilon\rho\ a_T}{c}Lu)F_0\right]+Q_0\frac{1}{A}\left[1-\exp(-AF_0)\right], \quad (20)$$

где

$$Q_0=AT_{cp}-\frac{(v+1)(1-\varepsilon)\rho R}{\lambda}(1+\delta)q_1-\frac{(v+1)\varepsilon\rho a_T RLu}{c\lambda`}q_2 \quad (21)$$

$$A=(v+1)Bi(1+\frac{\varepsilon\rho a_T\delta}{c}Lu) \quad (22)$$

Подставим значение:

$$< T(F_0) >= T_0 \exp(-AF_0) + \frac{Q_0}{A}\left[1 - \exp(-AF_0)\right]$$

во второе уравнение системы (14) и предположим, что

$$\varphi(F_0) = T_c, \quad q(F_o) = q_1, \quad q`(F_0) = q_2.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d < T(F_0) >}{dF_0} &= (\nu+1)Bi\left[T_c - < T(F_0) >\right] - \frac{(\nu+1)(1-\varepsilon)\rho Rq_1}{\lambda} + \frac{\varepsilon \rho a_T}{C} \cdot \frac{d < W(F_0) >}{dF_0} \\ \frac{d < W(F_0) >}{dF_0} &= (\nu+1)LuBi\left[T_c - < T(F_0) >\right] - \frac{(1-\varepsilon)\rho Rq_1}{\lambda} - \frac{\delta Rq_2}{\lambda`} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Результаты вычислений по система уравнение (23) при определенных значениях параметров для условий солнечных сушильных установок, показывают, что теоретические расчеты хорошо согласуются с экспериментальными данными (рис.1).

Как видно из уравнений (23), процесс сушки определяется значительным количеством параметров (коэффициент диффузии влаги, термовлагопроводность, теплопередача, массообмен, испарение, теплоемкость и др. которые принимаются постоянных при решении задачи тепло - и массообмена в процессе сушки фруктов.

Условные обозначения :

T_0, T, T_{cp} -начальная, текущая и средняя по объему текущая температура теплоносителя, К, τ - время, ч,

λ -коэффициент теплопроводности, Вт/(мК) С- теплоемкость материала, Дж/(кгК),

ρ -плотность абсолютно сухого тела, кг/м^3,

a_T, a_m -коэффиценты температуропроводности, диффузии влаги, м^2 /с,

r, R -текущий линейный размер, максимальный радиус, м,

ε - критерий фазового перехода,

δ -коэффициент термовлагопроводности, 1/К,

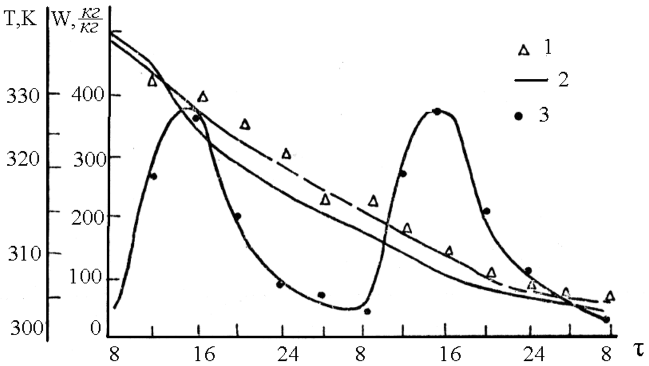

Рис. 1. Зависимость влагосодержание абрикоса от температуры воздуха в ССУ и времен: 1, 2-экспериментальные и расчетные (формула 23) данные; 3-изменение температуры воздуха.

$(\nabla T)_n$ - текущая температура на поверхности материала, К,

$(\nabla W)_n$ - начальное влагосодержание материала на поверхности, кг/кг сухого материала,

W_0, W - начальное и текущее среднее по объему влагосодержание фруктов, кг/кг сухих фруктов,

q - поток массы, кг/ м^2 К.

α - коэффициент теплоотдачи Вт/(м^{2}К).

ССУ – солнечная сушильная установка.

References:

[1] Likov A.V., Mixaylov Yu.A., Teoriya teplo- i massoperenosa. M. -L.: Gos.energo.izdat, 1963. 535 S.
[2] Likov A. V. Teoriya sushki. -M. Energiya. 1968. 472 S.
[3] Dech G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa. -M.: Fizmatgiz. 1960. 207 S.
[4] Likov A. V.. Teplo- i massoobmen v protsessax sushki. -M. -L.: Gosenergoizdat. 1956. 464 S.

[5] Abramovich I.G., Lunts G. L.,Elgolts L. E. Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoe ischislenie. Teoriya ustoychivosti.-M.: Nauka. 1968. 210 S.

[6] TSoy P. V., Metodi rascheta zadach teplomassoprenosa.-M.: Energoatomizdat. 1984. 414 S.

[7] Bekmuratov T.F., Xayriddinov B.E., Isaev S.M., Maxamov X.M. Dinamicheskie xarakteristiki mnogosloynoy kameri gelioteplitsi – sushilki, kak ob'ekta regulirovaniya. //Uzbekskiy jurnal problemi informatiki i energetiki. 1993. № 5. S. 17-24.

Список литературы:

[1] Лыков А.В., Михайлов Ю.А., Теория тепло- и массопереноса. М. -Л.: Гос.энерго.издат, 1963. 535 С.

[2] Лыков А. В. Теория сушки. -М. Энергия. 1968. 472 С.

[3] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. -М.: Физматгиз. 1960. 207 С.

[4] Лыков А. В.. Тепло- и массообмен в процессах сушки. -М. -Л.: Госэнергоиздат. 1956. 464 С.

[5] Абрамович И.Г., Лунц Г. Л.,Эльгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.-М.: Наука. 1968. 210 С.

[6] Цой П. В., Методы расчета задач тепломассопреноса.-М.: Энергоатомиздат. 1984. 414 С.

[7] Бекмуратов Т.Ф., Хайриддинов Б.Э., Исаев С.М., Махамов Х.М. Динамические характеристики многослойной камеры гелиотеплицы – сушилки, как объекта регулирования. //Узбекский журнал проблемы информатики и энергетики. 1993. № 5. С. 17-24.