[Scientific-technical journal](https://uzjournals.edu.uz/ferpi)

[Volume 22](https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol22) | [Issue 2](https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol22/iss2) Article 4

3-1-2018

DYNAMIC STABILITY OF VISCOELASTIC SHALLOW SHELLS OF VARIABLE THICKNESS WITH DOUBLE CURVATURE

R A. Abdukarimov

D A. Khodzhaev

2. DYNAMIC STABILITY OF VISCOELASTIC SHALLOW SHELLS OF VARIABLE THICKNESS WITH DOUBLE CURVATURE

R.A. Abdukarimov[1], D.A. Khodzhaev [1], N.I. Ibrohimov[2]

[1] Tashkent institute of finance. Tashkent, Uzbekistan,
[2] Ferghana Polytechnic Institute. Ferghana, Uzbekistan,

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С ДВОЯКОЙ КРИВИЗНОЙ

Abstract. *The paper deals with the problem of the stability of viscoelastic isotropic and orthotropic shallow shells of variable thickness with double curvature under the action of axial dynamic loads. Using the Bubnov-Galerkin method, the problem under consideration reduces to a system of nonlinear ordinary integro-differential equations in partial derivatives of the Volterra type, which is solved by a numerical method based on the use of quadrature formulas. Within a wide range of changes in the physic-mechanical and geometric parameters of the deformed system, with rapidly increasing loads, critical loads and time are found.*
Key words: shallow shell of double curvature, variable thickness, viscoelasticity, heterogeneity, dynamic stability, integro-differential equations, numerical method.

Аннотация. *В работе рассматривается задача об устойчивости вязкоупругих изотропных и ортотропных пологих оболочек переменной толщины с двоякой кривизной при действии осевых динамических нагрузок. С помощью метода Бубнова-Галеркина рассматриваемая задача сводится к системе нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) в частных производных типа Вольтерра, которая решается численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. В широких пределах изменения физико-механических и геометрических параметров деформируемой системы при быстро возрастающих нагрузках находятся критические нагрузки и время.*
Ключевые слова: пологая оболочка двоякой кривизны, переменная толщина, вязкоупругость, неоднородность, динамическая устойчивость, интегро-дифференциальные уравнения, численный метод.

Аннотация. *Ишда икки томонлама эгриликка эга бўлган қовушқоқ-эластик изотроп ва ортотроп ўзгарувчан қалинликдаги қия қобиқнинг бўйлама динамик кучлар таъсирида динамик турғунлиги масаласи кўрилмоқда. Кўриб чиқилаётган масала Бубнов-Галеркин усули ёрдамида Вольтерра типидаги хусусий ҳосилали, чизиқсиз оддий интегро-дифференциал тенгламалар системасига келтирилади. Бу система квадратура формулаларини қўллашга асосланган сонли усул ёрдамида ечилади. Тез ўсувчи кучлар таъсирида деформацияланаётган тизимнинг физик-механик ва геометрик параметрларини кенг ўзгариши доирасида критик куч ва вақт топилмоқда.*
Таянч сўзлар: икки томонлама эгриликга эга бўлган қия қобиқ, ўзгарувчан қалинлик, қовушқоқ-эластиклик, бир жинсли бўлмаган, динамик турғунлик, интегро-дифференциал тенгламалар, сонли усул.

Введение. Тонкостенные конструкции типа пластины, панели и оболочки переменной толщины широко внедряются в различных областях техники и строительства. С их помощью достигается создание чрезвычайно легких и экономичных, но одновременно прочных и жестких сооружений. Тонкостенные конструкции могут находиться под действием силовых нагрузок. При значительных воздействиях в таких конструкциях возникают большие прогибы, и поэтому для уточнения напряженно-деформируемого состояния появляется необходимость проводить исследования в геометрически нелинейной постановке.

В современной технике и строительстве наряду с оболочками из традиционных металлических материалов широко используются конструкции из композиционных материалов, что приводит к необходимости рассмотрения как изотропных, так и анизотропных оболочек. Решение задач для оболочек переменной толщины связано с определенными вычислительными трудностями, что ограничивает применение аналитических методов. Широкое применение персональных компьютеров и комплекса прикладных программ для решения задач теории оболочек способствует все большему использованию методов численного анализа. Следовательно, разработка новых, более современных математических моделей деформирования тонкостенных оболочечных конструкций переменной толщины при статическом и динамическом нагружении, а также новых, более удобных алгоритмов их исследования является актуальный задачей.

Изучению поведения изотропных и ортотропных пластин, круговых цилиндрических оболочек постоянной толщины при осевых динамических нагрузках и поперечных внешних давлениях в упругой постановке посвящен цикл работ. Обзор результатов этих исследований можно найти в монографиях [1, 2].

Проблеме динамической устойчивости цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, при нестационарном внешнем давлении посвящены работы [3]. В них рассматриваются решения задач деформирования несовершенных ортотропных цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами жесткости, при равномерно распределенных по торцам осесимметричных сжимающих усилиях и равномерно распределенном по боковой поверхности динамическом внешнем давлении.

Ряд работ посвящен исследованию поведения пластин и оболочек при динамических нагрузках с учетом вязкоупругих свойств материала. Обзор результатов этих исследований можно найти в работе [4].

Вопросы устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин, цилиндрических панелей и оболочек при осевых сжимающих нагрузках в геометрически нелинейной постановке рассматривались в работах [5, 6]. В качестве критериев динамической устойчивости использованы критерии А.С.Вольмира [2]. Здесь при решении задачи также используются подходы А.Е.Богдановича [7], основанные на использовании многочленной аппроксимации прогиба.

Исследованию устойчивости оболочек постоянной и ступенчато-переменной толщины в геометрически нелинейной постановке при учете (и не учете) ползучести материала посвящены работы В.М. Жгутова [8, 9], Р.А. Абдикаримова [10, 11]. Тем не менее, поведение пластин и оболочек гладко-переменной толщины при совместном учете отмеченных важных факторов в настоящее время исследовано недостаточно и требует дальнейшего изучения.

1. Постановка и математическая модель задачи. В настоящей работе исследуется динамическая устойчивость вязкоупругой пологой оболочки двоякой кривизны с переменной толщиной $h=h(x,y)$ и радиусами кривизны срединной поверхности R_1 и R_2 при действии осевых динамических нагрузок.

Допустим, что оболочка изготовлена из однородного изотропного материала и подвергается динамическому сжатию силой $P(t)=\upsilon \cdot t$ (υ - скорость нагружения), при условии, что оболочка имеет начальные прогибы. При принятых предположениях математическая модель этой задачи относительно полного прогиба $w=w(x,y,t)$ и перемещений $u=u(x,y,t)$, $v=v(x,y,t)$ описывается уравнением [10] с учетом силы $P(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и начального прогиба $w_0=w_0(x,y,t)$.

Аналогичным образом получается математическая модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной оболочки [10].

Таким образом, математические модели задачи о динамической устойчивости вязкоупругих изотропных и ортотропных оболочек переменной толщины с двоякой кривизной в геометрически нелинейной постановке описываются системой интегро-дифференциальных уравнений в частных производных при соответствующих граничных и начальных условиях.

2. Расчет нелинейных колебаний вязкоупругих тонкостенных конструкций переменной толщины. Полный и начальный прогибы, а также перемещения аппроксимируем в виде

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}u_{nm}(t)\phi_{nm}(x,y),\quad v(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}v_{nm}(t)\varphi_{nm}(x,y),$$
$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}w_{nm}(t)\psi_{nm}(x,y),\; w_0(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}w_{0nm}\psi_{nm}(x,y),\qquad (1)$$

где $u_{nm}=u_{nm}(t),\; v_{nm}=v_{nm}(t),\; w_{nm}=w_{nm}(t)$ – неизвестные функции времени; $\phi_{nm}(x,y)$, $\varphi_{nm}(x,y)$, $\psi_{nm}(x,y)$, $n=1,2,...,N$; $m=1,2,...,M$ – координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

Поставив (1) в уравнение движения и выполнив процедуру Бубнова-Галеркина, при этом введя следующие безразмерные величины

$$\frac{u}{h_0},\;\frac{v}{h_0},\;\frac{w}{h_0},\;\frac{w_0}{h_0},\;\frac{x}{a},\;\frac{y}{b},\;\frac{h}{h_0},\;\lambda=\frac{a}{b},\;\delta=\frac{b}{h_0},\;\bar{k}_x=\frac{a^2}{h_0R_1},\;\bar{k}_y=\frac{b^2}{h_0R_2},$$

$$t^*=\frac{P}{P_{кр}}=\frac{\upsilon t}{P_{кр}}=\frac{\omega t}{\sqrt{S}}=\frac{P^*}{P_{кр}^*},\qquad P^*=\frac{P}{E}\left(\frac{b}{h_0}\right)^2,\qquad \frac{q}{E}\left(\frac{b}{h_0}\right)^4,\qquad S=P_{кр}^{*3}\left(\frac{\pi cEh_0^3}{\upsilon b^4}\right)^2,$$

$$P_{кр}^*=\frac{P_{кр}}{E(b/h_0)^2}=\frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)},\;\Gamma(t)\frac{\sqrt{S}}{\omega}$$

и сохраняя прежние обозначения, для определения неизвестных $w_{nm}=w_{nm}(t),\; u_{nm}=u_{nm}(t)$, $v_{nm}=v_{nm}(t)$ получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{S}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}a_{klnm}\ddot{u}_{nm}-\eta_1(1-\Gamma^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(d_{1klnm}u_{nm}+\lambda e_{1klnm}v_{nm}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{k_x+\lambda^2\mu k_y}{\lambda\delta}f_{1klnm}(w_{nm}-w_{0nm})\right)+\frac{1}{\delta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}g_{1klnmij}(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij})\right\}=0,$$

$$\frac{1}{S}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}b_{klnm}\ddot{v}_{nm}-\eta_2(1-\Gamma^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{\lambda}d_{2klnm}u_{nm}+e_{2klnm}v_{nm}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\lambda^2k_y+\mu k_x}{\lambda^2\delta}f_{2klnm}(w_{nm}-w_{0nm})\right)+\frac{1}{\delta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}g_{2klnmij}(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij})\right\}=0,$$

$$\frac{1}{S}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}c_{klnm}\ddot{w}_{nm}+\eta_3(1-\Gamma^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(d_{3klnm}u_{nm}+e_{3klnm}v_{nm}+f_{3klnm}(w_{nm}-w_{0nm})\right)-\right.\qquad (2)$$
$$\left.-\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}g_{3klnmij}(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij})\right\}+$$
$$\eta_3\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p_{klnm}^*w_{nm}t^*-\eta_3\left\{\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}w_{nm}(1-\Gamma^*)\left(d_{4klnmij}u_{ij}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+e_{4klnmij}v_{ij}+f_{4klnmij}(w_{ij}-w_{0ij})\right)+\sum_{n,i,r=1}^{N}\sum_{m,j,s=1}^{M}g_{klnmijrs}w_{nm}(1-\Gamma^*)(w_{ij}w_{rs}-w_{0ij}w_{0rs})\right\}=0,$$

$$u_{nm}(0)=u_{0nm},\;\dot{u}_{nm}(0)=\dot{u}_{0nm},\;v_{nm}(0)=v_{0nm},\;\dot{v}_{nm}(0)=\dot{v}_{0nm},\;w_{nm}(0)=w_{0nm},\;\dot{w}_{nm}(0)=\dot{w}_{0nm},$$

где $c=\sqrt{E/\rho}$ – скорость звука в материале оболочки; $P_{кр}=\dfrac{\pi^2}{3(1-\mu^2)}E\left(\dfrac{h_0}{b}\right)^2$ –

статическая критическая нагрузка; $\omega=\sqrt{\pi^2 E h_0^2 P_{кр}^* / \left(\rho b^4\right)}$ – частота основного тона колебаний; остальные постоянные коэффициенты, входящие в эту систему связаны с координатными функциями и их производными.

Аналогично предыдущему случаю, можно получить дискретную модель задачи, в случае, если рассматривается ортотропная пологая оболочка.

Интегрирование систем (2) выполнялось с помощью численного метода, предложенного в [11]. При этом в качестве ядер релаксации используется слабосингулярное ядро Колтунова-Ржаницына вида [12]

$$\Gamma(t)=Ae^{-\beta t}t^{\alpha-1}, \quad (0<\alpha<1)$$

Здесь, в качестве критерия, определяющего критическое время, а месте с тем и критическую нагрузку, принимается условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине оболочки, предложенное в работе [2]. Для определения динамической критической нагрузки будем использовать динамический коэффициент $K_Д$, равный отношению динамической «критической» нагрузки к верхней статической. Результаты вычислений при различных физических и геометрических параметрах, выполненных с помощью компьютера, отражаются графиками, приведенными на рис.1-2. Закон изменения толщины выбирается в виде: $h=1-\alpha^* x$. Здесь, если не оговорены другие данные, в качестве исходных данных, при вычислениях были приняты следующие: A=0.05; α=0.25; β=0.05; μ=0.3; δ=25; $k_x=20$; $k_y=20$; S=1; w_0=0.0001; q=0; λ=1; α^*= 0.5.

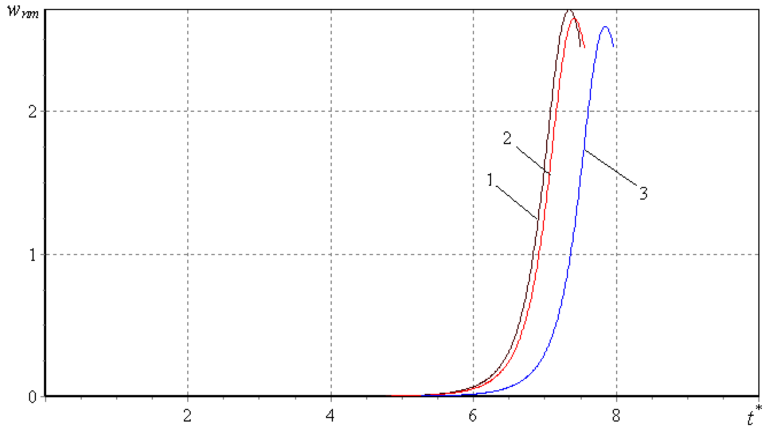

Рис.1. Зависимость прогиба от времени при α^*=0(1), 0.4(2), 0.8(3).

Исследовано влияние на динамическую устойчивость параметра изменения толщины пологой оболочки α^* по вышеприведенному закону. На рис.1 приведены графики для α^* = 0; 0.4; 0.8. Коэффициент динамичности $K_Д$ составляет соответственно 6.84; 6.92; 7.36. Вычисления производились при равных объемах оболочек постоянной и переменной толщины. Из графиков видно, что с уменьшением толщины значение коэффициента $K_Д$ увеличивается.

Изучено влияния вязкоупругих свойств материала конструкции на поведение ортотропной пологой оболочки (рис.2).

Кривая 1 соответствует случаю, когда вязкоупругие свойства материала не учитываются ($A=A_{ij}=0;\ i=1{,}2;\ j=1{,}2$ - упругий случай), кривая 2 – случаю, когда вязкоупругие свойства материала учитываются только по сдвиговым направлениям и кривая 3, случаю, когда вязкоупругие свойства материала учитываются одинаково по всем направлениям

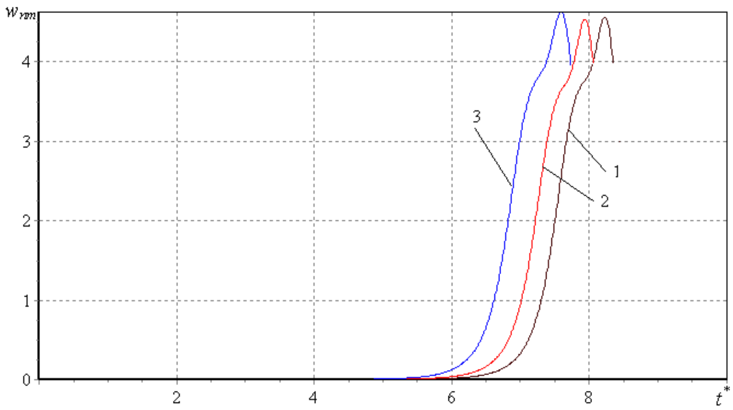

Рис.2. Зависимость прогиба от времени.

($A = A_{ij} = 0.05; i = 1,2;\ j = 1,2$). Значение коэффициента $K_Д$ в этих случаях соответственно равно 7.3; 7.01; 6.61. Как видно из рисунка, учет вязкоупругих свойств материала по всем направлениям приводит к более раннему, интенсивному возрастанию прогибов соответственно уменьшению критических значений $K_Д$.

Заключение. Таким образом, в геометрической нелинейной постановке исследована динамическая устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны с учетом переменной жесткости, а также вязкоупругих и неоднородных свойств материала. В широких пределах изменения физико-механических и геометрических параметров определены коэффициенты динамичности, позволяющие находить критические нагрузку и время. Выявлено ряд новых механических эффектов, в частности:

- решения упругой и вязкоупругой задач отличаются на 15-20%;
- учет нелинейных свойств материала приводит к увеличению критической нагрузки и времени;
- изменение толщины тонкостенных элементов конструкций по различным законам приводит к уменьшению критической нагрузки и времени в пределах 20-50%.

Во всех рассмотренных случаях сравнивались результаты одночленной и многочленной аппроксимаций прогиба и выявлено, в частности, что в случае задач постоянной толщины можно ограничиться одночленной аппроксимацией. Для каждого случая найдено число полуволн, необходимое для получения решения достаточной точности.

References:

[1] Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustoychivost uprugix sistem. – M.: Goztexizdat. – 1956. – 600 s.
[2] Volmir A.S. Ustoychivost deformiruemix sistem. – M.: Nauka. –1967. – 984 s.
[3] Amiro I.Ya. i dr. Kolebaniya rebristix obolochek vrasheniya. – Kiev: Naukova Dumka. – 1988. – 172 s.
[4] Rjanitsin A.R. Teoriya polzuchesti. – M.: Nauka, 1968. – 416 s.
[5] Badalov F.B., Eshmatov X., Tangirov A.E. Dinamicheskaya ustoychivost vyazkouprugoy ortotropnoy plastini // DAN UzSSR. – №9. – 1989. – S.19-21.
[6] Eshmatov X. Integralniy metod matematicheskogo modelirovaniya zadach dinamiki vyazkouprugix sistem: Dis... na sois. uchen. step. dok.texn.nauk: 18.05.13. In-t problem modelirovaniya v energetike AN Ukraini. – Kiev, 1991. – 337 s.
[7] Bogdanovich A.E. Nelineynie zadachi dinamiki tsilindricheskix kompozitnix obolochek. – Riga: Zinatne. – 1987. – 296 s.
[8] Jgutov V.M. Matematicheskie modeli i algoritmi issledovaniya ustoychivosti pologix rebristix obolochek pri uchete razlichnix svoystv materiala // Izv. Orlovskogo gos. texn. un-ta. Ser. «Stroitelstvo, transport». – 2007. – № 4. – S.20-23.
[9] Jgutov V.M. Matematicheskie modeli, algoritm issledovaniya i analiz ustoychivosti rebristix obolochek s uchetom polzuchesti materiala pri konechnix progibax // Nauchno-texnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politexnicheskogo universiteta. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki». – 2010. – № 2. – S. 53-59.
[10] Abdikarimov R.A., Jgutov V.M. Matematicheskie modeli zadach nelineynoy dinamiki vyazkouprugix ortotropnix plastin i obolochek peremennoy tolshini // Injenerno-stroitelniy jurnal. – Sankt-Peterburg, 2010. – №6. – S.38-47.
[11] Verlan A.F., Abdikarimov R.A., Eshmatov X. CHislennoe modelirovanie nelineynix zadach dinamiki vyazkouprugix sistem s peremennoy jestkostyu // Elektronnoe modelirovanie. – 2010. – T.32. – №2. – S.3-14.
[12] Koltunov M.A. Polzuchest i relaksatsiya. – M.: Visshaya shkola, 1976. – 276 s.

Список литературы

[1] Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гозтехиздат. – 1956. – 600 с.
[2] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука. –1967. – 984 с.
[3] Амиро И.Я. и др. Колебания ребристых оболочек вращения. – Киев: Наукова Думка. – 1988. – 172 с.
[4] Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
[5] Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Тангиров А.Э. Динамическая устойчивость вязкоупругой ортотропной пластины // ДАН УзССР. – №9. – 1989. – С.19-21.
[6] Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Дис... на соис. учен. степ. док.техн.наук: 18.05.13. Ин-т проблем моделирования в энергетике АН Украины. – Киев, 1991. – 337 с.
[7] Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне. – 1987. – 296 с.

[8] Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007. – № 4. – С.20-23.
[9] Жгутов В.М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010. – № 2. – С. 53-59.
[10] Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. – Санкт-Петербург, 2010. – №6. – С.38-47.
[11] Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование. – 2010. – Т.32. – №2. – С.3-14.
[12] Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 276 с.