SCIENTIFIC JOURNAL OF SAMARKAND UNIVERSITY

Volume 2019 Article 1

6-27-2019

Continuation of polyanalytic functions

T. Ishankulov
Samarkand State University, davron_fozilov87@mail.ru

G. Norqulova
Samarkand State University

ILMIY AXBOROTNOMA MATEMATIKA 2019-yil,3-son

УДК: 517.946

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Т. Ишанкулов[1], Г. Норкулова[2], Д. Фозилов[3]
[1,2]Самарканд государственный университет,
[3] Самаркандский филиал Ташкентско университета информационных технологий
E-mail: davron_fozilov87@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача продолжения n −аналитической функции в область по значениям ее последовательных производных до $(n-1)$ -го порядка на части границы. Также рассматривается задача обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши для таких функций.

Ключевые слова: уравнение Коши-Римана, полианалитические функции,теорема Коши,формула Ю.Сохоцкого.

Polianalitik funksiyalarni davom ettirish

Annotatsiya.$n-$ analitik funksiyalarni soha chegarasi qismidagi $(n-1)$ –tartibgacha hosilalarining qiymatlariga ko‘ra shu sohaga davom ettirish masalasi qaraladi. Bu funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning Koshi integral formulasiga aylanishi haqidagi masala ham qaraladi.

Kalit so‘zlar: Koshi-Riman tenglamasi, polianalitik funksiya, Koshi teoremasi, Soxotskiy formulasi.

Continuation of polyanalytic functions

Abstract. We consider the problem of continuation the $n-$ analytic function in to a domain by values of its sequential derivatives up to the $(n-1)$ -th order on a part of the boundary. The problem of inversion of a Cauchy type integral to a Cauchy integral for such functions is also considered.

Keywords: Cauchy-Riemann equation,$n-$ analytic function, Cauchy theorem, Sokhotskii formula.

Функция $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ называется полианалитической порядка n в некоторой области D плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, если она в D имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно и удовлетворяет обобщенному условию Коши-Римана:

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n}=0, \qquad \text{где} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Постановка задачи. Требуется определить полианалитическую функцию $w(z)$ в области D по значениям ее последовательных производных $\frac{\partial^k w}{\partial \bar{z}^k}$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ на части границы S $(S\subset\partial D)$ этой области:

$$\frac{\partial^k w(z)}{\partial \bar{z}^k}=f_k(z),\ (k=0,1,\dots,n-1),\ z\in S \quad \left(\frac{\partial^0 w}{\partial \bar{z}^0}=w\right). \tag{2}$$

В случае n=1 задача (1), (2) превращается в граничную задачу аналитического продолжения функций комплексной переменной или в задачу Коши для эллиптической системы Коши-Римана. Класс полианалитических в области D функций обозначим через $\Pi_n(D)$. При n=1 этот класс совпадает с классам $A(D)$ аналитических в области D функций.

Единственность решения задачи (1), (2) из следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $W\in\Pi_n(D)\cap C^{n-1}(\overline{D})$.
Если при $z\in S$ $\frac{\partial^k w(z)}{\partial \bar{z}^k}=0$, $(k=0,1,\dots,\mathrm{n}-1)$ то $w(z)\equiv 0$.

Доказательство. Функция

$$\frac{\partial^{n-1} w}{\partial \bar{z}^{n-1}}\in A(D) \text{ и } \frac{\partial^{n-1} w(z)}{\partial \bar{z}^{n-1}}=0,\ z\in S.$$

По граничной теореме единственности [2,6], имеем

$$\frac{\partial^{n-1} w(z)}{\partial \bar{z}^{n-1}} = 0\,, \qquad z \in D.$$

Далее

$$\frac{\partial^{n-2} w}{\partial \bar{z}^{n-2}} \in A(D) \text{ и } \frac{\partial^{n-2} w(z)}{\partial \bar{z}^{n-2}} = 0,\ z \in S.$$

По теореме единственности

$$\frac{\partial^{n-2} w(z)}{\partial \bar{z}^{n-2}} = 0,\ z \in D \text{ и т.д.}$$

Продолжая это рассуждение получим $w(z) \equiv 0$ в области D.

Следующий пример подобный примеру Адамара показывает неустойчивость задачи (1), (2).

Пример.Последовательность функций

$$w_m(z) = \frac{\bar{z}^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{m} e^{-imz}$$

удовлетворяет уравнению (1), т.е. является полианалитической функцией. Производная k-го порядка равна

$$\frac{\partial^k w_m(z)}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\bar{z}^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \frac{1}{m} e^{-imz} \quad (k = 0,1, \dots, n-1).$$

При $y = 0$ стремиться к нулю когда $m \to \infty$

$$\left. \frac{\partial^k w_m(z)}{\partial \bar{z}^k} \right|_{y=0} = \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \frac{1}{m} e^{-imx} \to 0.$$

Однако в верхней полуплоскости $(y > 0) w_m(z) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Таким образом, задача (1,2) является некорректной [6].

Приведем оценку условной устойчивости задачи (1), (2) для бианалитических функций $(n = 2)$.

Обозначим через M множество функций $w \in \Pi_2(D) \cap C^1(\bar{D})$, удовлетворяющих при $z \in D$ неравенством

$$|w(z)| \le C, \quad \left| \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \right| \le C, \tag{3}$$

где C постоянное число, не зависящая от функции $w(z)$.

Теорема 2. Пусть $w \in M$ и $|w(z)|_S < \varepsilon$, $\left| \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \right|_S < \varepsilon$. Тогда при $z \in D$, имеет место неравенство

$$|w(z)| \le (2 + d) \varepsilon^{\omega(z)} C^{1-\omega(z)}, \tag{4}$$

где $d = \max\limits_{z \in \bar{D}} |z|$, $\omega(z) -$ гармоническая мера множества Sотносительно области D.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(z) = w(z) - \bar{z} \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}}$. Эта функция является аналитической в области D, удовлетворяет неравенством

$$|F(z)| \le (1 + d)\varepsilon,\ z \in S,$$
$$|F(z)| \le (1 + d)C,\ z \in \bar{D}.$$

По теореме о двух константах для аналитических функций [6,8],имеем

$$|F(z)| \leq [(1+d)\varepsilon]^{\omega(z)}[(1+d)C]^{1-\omega(z)} = (1+d)\varepsilon^{\omega(z)}C^{1-\omega(z)}. \quad (5)$$

Функция $\frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \in A(D)$ удовлетворяет неравенству (3) и $\left|\frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}}\right|_S < \varepsilon$. По теореме о двух константах, имеем

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}}\right| \leq \varepsilon^{\omega(z)}C^{1-\omega(z)},\ z \in D. \quad (6)$$

Теперь используя (5), (6) оценим $|w(z)|_D$:

$$|w(z)| = |w(z) - \bar{z}w_{\bar{z}}(z) + \bar{z}w_{\bar{z}}| \leq |w(z) - \bar{z}w_{\bar{z}}(z)| + |\bar{z}||w_{\bar{z}}(z)| \leq$$
$$\leq (1+d)\varepsilon^{\omega(z)}C^{1-\omega(z)} + \varepsilon^{\omega(z)}C^{1-\omega(z)} = (2+d)\varepsilon^{\omega(z)}C^{1-\omega(z)}.$$

Важным средством для построения теории аналитических функций служит интегральная формула Коши. Для полианалитических функций Н.Теодореску [1] впервые получил аналогичную формулу выражающую значения полианалитической функции внутри области D через значения этой функции и ее последовательных производных $\frac{\partial^k w}{\partial \bar{z}^k}$ $(k = 0,1,\ldots,n\text{-}1)$ на границе:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial D}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)}\frac{\partial^k w(t)}{\partial \bar{t}^k}dt\left(\frac{\partial^0 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}^0} = \mathrm{w}\right). \quad (7)$$

В случае *n=1* решение задачи (1), (2) для аналитических функций дает формула Карлемана[6,7]. Приведем аналог формулы Карлемана для полианалитических функций в случае когда область D_1 ограничен отрезком АВ действительной оси и гладкой кривой *S*, лежащей верхней полуплоскости.

Теорема 3. Пусть функция $w \in \Pi_n(D_1) \cap C^{n-1}(D_1)$, удовлетворяет условиям (2). Тогда при $z \in D_1$ имеют место следующие эквивалентные формулы продолжения

$$w(z) = \lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)}e^{-i\sigma(t-z)}f_k(t)dt\,, \quad (8)$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)}f_k(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\sigma\sum_{k=0}^{n-1}\int_S^\infty \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}e^{-i\sigma(t-z)}f_k(t)dt. \quad (8a)$$

Доказательство.Эквивалентность формул (8) и (8а) легко установливается при помощи формулы Ньютона-Лейбница.Докажем формулу (8).Рассмотрим функцию

$$F(z) = e^{-i\sigma z}w(z) \in \Pi_n(D_1) \cap C^{n-1}(\bar{D}_1).$$

По интегральной формуле Коши (7),имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial D_1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!\,(t-z)}\frac{\partial^k F(t)}{\partial \bar{t}^k}dt\,, \qquad z \in D_1.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S \frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)}e^{-i\sigma(t-z)}f_k(t)dt + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{AB}\frac{(\bar{z}-\bar{\xi})^k}{k!(\xi-z)}e^{-i\sigma(\xi-z)}\frac{\partial^k w(\xi)}{\partial \bar{t}^k}d\xi \quad (9)$$

Оценим второй интеграл в правой части равенства (9):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{AB}\frac{(\bar{z}-\bar{\xi})^k}{k!(\xi-z)}e^{-i\sigma(\xi-z)}\frac{\partial^k w(\xi)}{\partial \bar{t}^k}d\xi\right| \leq C_1 e^{-\sigma y}, \quad (10)$$

гдеC_1 некоторая постоянная. Переходя к пределу при $\sigma \to \infty$ в равенстве (9) и учитывая неравенство (10) получим формулу (8).

При $n = 2$ для бианалитических функций получается:

Следствие. Для бианалитической функции $w \in \prod_2(D_1) \cap C^1(D_1)$ имеют место эквивалентные формулы продолжения

$$w(z) = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^{-i\sigma(t-z)}}{t-z}[w(t) + (\bar{z}-\bar{t})w_{\bar{t}}(t)]dt, \quad (8')$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{1}{t-z}[w(t) + (\bar{z}-\bar{t})w_{\bar{t}}(t)]dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\sigma \int_S e^{-i\sigma(t-z)}[w(t) + (\bar{z}-\bar{t})w_{\bar{t}}(t)], \; z \in D_1. \quad (8a')$$

При $n = 1$ формулы (8), (8a) превращаются в известную формулу Карлемана для аналитических функций [6,7].

Задача (1), (2) является переопределенной . По этому она разрешима не для любых начальных данных. Для аналитических функций $(n = 1)$ В.А.Фок и Ф.М.Куни [3] нашли критерий разрешимости задачи (1),(2). Приведем критерий разрешимости задачи (1),(2) для бианалитических функций.

Теорема 4. Пусть функции $f_0, f_1 \in C(S)$, удовлетворяют условию Липщица. Для того чтобы существовала бианалитическая функция $w \in \Pi_2(D_1) \cap C^1(\bar{D})$, такая что

$$w(\zeta) = f_0(\zeta), \; w_{\bar{z}}(\zeta) = f_1(\zeta), \quad \zeta \in S \quad (11)$$

необходимо и достаточно равномерная сходимость несобственного интеграла

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\sigma \int_S e^{-i\sigma(t-z)}[f_0(t) + (\bar{z}-\bar{t})f_1(t)]dt\right| < \infty \quad (12)$$

на каждом компакте $K \subset \{Imz > 0\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует бианалитическая функция $w(z)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда функция

$$F(t,\bar{z}) = [w(t) + (\bar{z}-\bar{t})w_{\bar{t}}(t)]e^{-i\sigma t}$$

является аналитической по переменной t в области D, непрерывной в замыкании $\bar{D}_1$. По интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial D_1} F(t,\bar{z})dt = 0, \qquad t = \xi + i\eta, \; \bar{z} = x - iy,$$

или

$$\int_S [f_0(t) + (\bar{z}-\bar{t})f_1(t)]\, e^{-i\sigma t}dt = -\int_{AB}[f_0(\xi) + (\bar{z}-\xi)f_1(\xi)]e^{-i\sigma\xi}d\,\xi. \quad (13)$$

Интеграл в правой части равенства (13) стремится к нулю при $\sigma \to \infty$ по теореме Римана-Лебега [3] . Отсюда следует, что функции f_0, f_1 удовлетворяют условию (12).

Достаточность. Пусть функции $f_0, f_1 \in C(\mathrm{S}) \cap Lip(S)$ удовлетворяют условию (12). Рассмотрим выражение, которое будет стоят в правой части (8a'), если заменить там $w(t)$ и $w_{\bar{t}}(t)$ на $f_0(t)$ и $f_1(t)$ соответственно. Обозначим это выражение через $g(z)$. Первое слагаемое в $g(z)$ есть интеграл типа Коши для бианалитических функций

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f_0(t) + (\bar{z}-\bar{t})f_1(t)}{t-z}dt, \quad (14)$$

который представляет бианалитическую в области D_1 функцию $F_+(z)$ и бианалитическую в оставщейся (после удаления $\bar{D}_1$) части верхней полуплоскости функцию $F_-(z)$, такие, что разность их предельных значений и предельных значений их производных по нормалям (или по углам определенного раствора, а соответствующие точки z^+ и z^- при стремлении к точке $\zeta \in S$

находятся на равных расстояниях от ζ) на S равны $f_0(\xi)$ и $f_1(\xi)$ соответственно (см.$[4\ ,c.67-69]$)

$$F_+(\zeta)-F_-(\zeta)=f_0(\xi)\ ,\ \frac{\partial F_+(\zeta)}{\partial\bar z}-\frac{\partial F_-(\zeta)}{\partial\bar z}=f_2(\zeta),\ \zeta\in S, \tag{15}$$

причем если одна из функций F_+ и F_- непрерывна в соответствующей области вплоть до S, то другая тоже является непрерывной вплоть до S. Второе слагаемое в $g(z)$, благодаря условию (12), есть бианалитическая функция от z во всей верхней полуплоскости. Следовательно выражение $g(z)$ определяет собой некоторую бианалитическую в области D_1, функцию $g_1(z)$ и некоторую бианалитичкскую в верхней полуплоскости вне $\overline{D}_1$ функцию $g_2(z)$, причем

$$g_1(\zeta)-g_2(\zeta)=f_0(\zeta),\ \ \frac{\partial g_1(\zeta)}{\partial\bar z}-\frac{\partial g_2(\zeta)}{\partial\bar z}=f_1(\zeta),\ \zeta\in S. \tag{16}$$

Но выражение $g(z)$, с другой стороны, равняется выражению, которое будет стоять в правой части (8'), если заменить там $w(t)$ и $w_{\bar t}(t)$ на $f_0(t)$ и $f_1(t)$ соответсвенно. Ясно, что $g_2(z)=0$ при $Imz>\max\limits_{\zeta\in S}(Im\zeta)$. В силу однозначности аналитического продолжения $g_2(z)\equiv 0$, так что $g_2(\zeta)=0,\frac{\partial g_2(\zeta)}{\partial\bar z}=0,(\zeta\in S)$. Но тогда из равенств (16), имеем

$$g_1(\zeta)=f_0(\zeta),\ \frac{\partial g_1(\zeta)}{\partial\bar z}=f_1(\zeta)(\zeta\in S).$$

Следовательно $g_1(z)$ есть искомая полианалитическая функция $w(z)$. Теорема доказана.

Рассмотрим интеграл типа Коши (14), где в качестве Sвозьмем простую замкнутую кривую Жордана. Пусть $f_0(z)$ и $f_1(z)$ функции суммируемые на S. Обозначим через D_i-область ограниченная кривой S, а через D_e −внешную неограниченную область. Интеграл типа Коши (14) представляет две регулярные полианалитические функции $F_i(z)$ и $F_e(z)$ соответственно в D_i и D_e соответственно. Рассмотрим условия обращения интеграла типа Коши (14) в интеграл Коши, т.е., что почти всюду на S выполняется соотношения

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to\zeta}F_i(z)=f_0(\zeta)\\ \lim\limits_{z\to\zeta}\frac{\partial F_i(z)}{\partial\bar z}=f_1(\zeta)\end{cases}\zeta\in S,z\in D_i. \tag{17}$$

Теорема 5. Пусть S простая замкнутая спрямляемая кривая, разделяющая плоскость комплексного переменного z две области $D_i\ и\ D_e$; f_0,f_1- заданные на S суммируемые функции. Для того чтобы интеграл типа Коши (14) обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно, чтобы $F_e(z)\equiv 0$ в D_e.

Доказательство. Используя формулы Ю.Сохоцкого о предельных значениях интеграла типа Коши [4,стр.67-69] легко показать, что функции $F_i(z)$ и $F_e(z)$ представимые интегралом (14) почти всюду на S удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to\zeta}(F_i(z)-F_e(z')) =f_0(\zeta),\\ \lim\limits_{z\to\zeta}\left(\frac{\partial F_i(z)}{\partial\bar z}-\frac{\partial F_e(z')}{\partial\bar z}\right)=f_1(\zeta)\end{cases}\qquad\zeta\in S,z\in D_i, \tag{18}$$

где z' точка на нормале к S, симметричная с точкой z относительно ζ.

Если условия (17) выполнены, то вместе с (18) они дают соотношения

$$\lim_{z\to\zeta}(F_e(z')=0,\qquad \lim_{z\to\zeta}\frac{\partial F_e(z')}{\partial\bar z}=0. \tag{19}$$

Функция $\frac{\partial F_e(z)}{\partial\bar z}$ является аналитической в D_e и в силу второго равенства (19), его граничные значения на Sравны нулю. По граничной теоремы единственности для аналитических функций [2] $\frac{\partial F_e(z)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ в области D_e. Таким образом $F_e(z) \in A(D_e)$ и в силу первого равенства (19), его граничные значения почти в сюду на S равны нулю. Опять применяя граничную теорему единственности заключаем, что $F_e(z)$≡0 в области D_e.

Наоборот, пусть $F_e(z)$≡0. Тогда из (18) следует, что

$$\lim_{z\to\zeta} F_i(z) = f_0(\zeta), \quad \lim_{z\to\zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F_i(z) = f_1(\zeta)$$

почти всюду на S. Теорема доказана.

Следующая теорема является аналогом критерия Голубева-Привалова [2] для бианалитических функций.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Для того чтобы интеграл типа Коши (14) обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_S [f_0(t) - \bar{t} f_1(t)] t^k dt = 0, \quad \int_S f_1(t) t^k dt = 0, \quad (k = 0,1, \dots).$$

Доказательство. Для функции $F_e(z)$ имеем представление

$$F_e(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f_0(t) + (\bar{z} - \bar{t}) f_1(t)}{t - z} dt, z \epsilon D_e.$$

Принимая во внимание теорему 5, разложим $F_e(z)$в степенной ряд в окрестности точки $z = \infty$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f_0(t) + (\bar{z} - \bar{t}) f_1(t)}{t - z} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f_0(t) + (\bar{z} - \bar{t}) f_1(t)}{z\left(1 - \frac{t}{z}\right)} dt =$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_S \left[f_0(t) - \overline{(z} - \bar{t}) f_1(t)\right] t^k dt = 0 \,.$$

Отсюда в силу единственности разложения в степенной ряд, получим

$$\int_S \left[f_0(t) - \overline{(z} - \bar{t}) f_1(t)\right] t^k dt = 0 \,, \quad (k = 0,1,2, \dots) \,. \qquad (20)$$

Из (20) следует утверждение теоремы.

References

1. TeodoreskuN., Laderiveeareolaire .These, Paris, 1931.
2. Privalov I.I. Granichniye svoystva analiticheskix funksiy. M. Gostexizdat, 1950, 336s.
3. Fok V.A.,Kuni F.M. O vvedenii “gasyashyey” funksii v dispersionniye sootnosheniya //Dokl. AN SSSR, 1959, T. 127, № 6, S. 1195 – 1196.
4. Musxelishvili N.I. Singulyarniye integralniye uravneniya. M. Fizmatgiz, 1962. 600s.
5. M. B. Balk, Zuyev M.F. O polianaliticheskix funksiyax. UMN, 1970, Tom 25, S.203 – 226.
6. Lavrentyev M.M., Romanov V.G., Shishatskiy S.P. Nekorrektniye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza. M. Nauka, 1980.
7. Ayzenberg L.A. Formulы Karlemana v kompleksnom analize. Perviye prilojeniya. Novosibirsk: Nauka, 1990.
8. Yevgrafov M.I. Analiticheskiye funksii. M. Nauka, 1991, 448s.