[Scientific reports of Bukhara State University](https://uzjournals.edu.uz/buxdu)

Volume 1 | Issue 3 Article 5

6-22-2018

THE TYPE OF THE GALLERSTEDT PROBLEM FOR THE DEGENERATE LOADED PARABOLO-HYPERBOLIC TYPE EQUATION

Furkat Mukhitdinovich Juraev
Senior teacher at Mathematical department, Bukhara state university

PHYSICAL SCIENCES AND MATHEMATICS: PHYSICS

УДК 517.956.6

БУЗИЛИШГА ЭГА БЎЛГАН ЮКЛАНГАН ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН ГЕЛЛЕРСТЕДТ МАСАЛАСИГА ЎХШАШ МАСАЛА

ЗАДАЧА ТИПА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

THE TYPE OF THE GALLERSTEDT PROBLEM FOR THE DEGENERATE LOADED PARABOLO-HYPERBOLIC TYPE EQUATION

Juraev Furkat Mukhitdinovich
Senior teacher at Mathematical department, Bukhara state university

Таянч сўзлар: бузиладиган юкланган тенгламалар, чегаравий масала, Геллерстедт типидаги масала, ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги.
Ключевые слова: вырождающиеся нагруженные уравнения, краевая задача, задача типа Геллерстедта, существование и единственность решения.
Key words: a degenerate loaded equation, boundary value problems, the Gellerstedt problem, the existence and uniqueness of a solution.

Аннотация

Мақолада бузилишга эга бўлган юкланган параболо-гиперболик типдаги тенглама учун Геллерстедт масаласига ўхшаш масала ечимининг бир қийматли ечилиши исботланган.

Аннотация

В данной статье доказана единственность решения задачи Геллерстедта длявырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.

Abstract

The article deals with the uniqueness of solving Gellerstedt problem for loaded degeneration parabolic-hyperbolic equation.

Введение. Краевые задачи для невырождающихся нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка, когда нагруженная часть содержит след или производную от искомой функции, изучены в работах [1-6]. Трёхмерный аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа исследована в [7].

Насколько нам известно, краевые задачи типа задачи Трикоми и Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы [8, 9]. Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию краевой задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа в виде

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^{p}u_{y}-\mu_0 u(x,0), & x>0,\quad y>0,\\ u_{xx}-(-y)^{m}u_{yy}+\mu_j u(x,0), & x>0,\ \ y<0, \end{cases} \quad (1)$$

где $m,\quad p,\quad \mu_0\quad \mu_1\quad \mu_2$ - любые действительные числа, причем

$$m<0,\ p>0,\ \mu_0>0,\ \mu_1<0,\ \mu_2<0. \quad (2)$$

Пусть Ω_0 - область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1, x=0, y=h$, соответственно, при $x>0, y>0$; Ω_1 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A(0,0)E(x_0,0)$ оси x и двумя характеристиками

$AC_1: x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$ $EC_1: x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0$ уравнения (1), выходящими из точки $A(0,0)$ и $E(x_0,0)$и пересекающимися в точке $C_1\left[\frac{x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}x_0\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$; Ω_2 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $E(x_0,0)B(1,0)$ оси x и двумя характеристиками $EC_2: x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0$ $BC_2: x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ уравнения (1), выходящими из точек $E(x_0,0)$ и $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C_2\left[\frac{1+x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}(1-x_0)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$, причем $x_0\in[0,1]$.

Введем следующие обозначения:

$$J_{11}=\left\{(x,y):\ 0<x<\frac{x_0}{2},\ y=0\right\},\qquad J_{12}=\left\{(x,y):\ \frac{x_0}{2}<x<x_0,\ y=0\right\},$$
$$J_{21}=\left\{(x,y):\ x_0<x<\frac{x_0+1}{2},\ y=0\right\},\quad J_{22}=\left\{(x,y):\ \frac{x_0+1}{2}<x<1,\ y=0\right\},$$
$$J_0=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\},\qquad J_1=\{(x,y):\ 0<x<x_0,\ y=0\},$$
$$J_2=\{(x,y):\ x_0<x<1,\ y=0\},\qquad \Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup J_0,$$

$2\beta=\frac{m}{m-2}$, причем $0<\beta<\frac{1}{2}$. (3)

В области Ω для уравнения (1) исследуется аналог задачи Геллерстедта.

Задача $A\Gamma$. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0\cup AE\cup EB)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях $\Omega_j\left(j=\overline{0,2}\right)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{AA_0}=\varphi_1(y),\quad u|_{BB_0}=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le h, \tag{4}$$
$$u|_{AC_1}=\psi_1(x),\qquad (x,0)\in\bar{J}_{11}, \tag{5$_1$}$$
$$u|_{EC_2}=\psi_2(x),\qquad (x,0)\in\bar{J}_{21}; \tag{5$_2$}$$

4) на линии вырождения $AE\cup EB$ выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y), \tag{6$_j$}$$

равномерно при $(x,0)\in J_j\ (j=1,2)$, где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ - заданные функции, причем $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$,

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \tag{7}$$
$$\psi_1(x)\in C^1(\bar{J}_{11})\cap C^3(J_{11}), \tag{8$_1$}$$
$$\psi_2(x)\in C^1(\bar{J}_{21})\cap C^3(J_{21}). \tag{8$_2$}$$

Теорема

Если выполнены условия (2), (3), (7), (8_1) и (8_2), то в области Ω существует единственное решение задачи *АГ*

Доказательство теоремы

Любое регулярное решение уравнения (1) при $y \neq 0$ может быть представлено в виде [4], [10]

$$u(x,y) = \upsilon(x,y) + \omega(x) \,(9),$$

где

$$\upsilon(x,y) = \begin{cases} \upsilon_0(x,y) & в \;\; \Omega_0, \\ \upsilon_1(x,y) & в \;\; \Omega_1, \\ \upsilon_2(x,y) & в \;\; \Omega_2, \end{cases} (10_j) \quad \omega(x) = \begin{cases} \omega_0(x), & в \quad 0 \le x \le 1, \\ \omega_1(x), & в \quad 0 \le x \le x_0, \\ \omega_2(x), & в \quad x_0 \le x \le 1, \end{cases} (11_j)$$

Здесь $\upsilon_0(x,y)$ и $\upsilon_j(x,y)\,(j=1,2)$- регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_0 \equiv \upsilon_{0\,xx} - x^p \upsilon_{0\,y} = 0 \qquad в \quad \Omega_0, \qquad\qquad (12_0)$$

$$L\upsilon_j \equiv \upsilon_{j\,xx} - (-y)^m \upsilon_{j\,yy} = 0 \qquad в \quad \Omega_j \quad (j=1,2).(12_j)$$

А $\omega_0(x)$ и $\omega_j(x)$ $(j=1,2)$- произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_0''(x) - \mu_0\omega_0(x) = \mu_0\upsilon_0(x,0), \quad 0 \le x \le 1\,(13_0)$$

и

$$\omega_j''(x) - \mu_j\omega_j(x) = \mu_j\upsilon_j(x,0), \quad x \in \bar{J}_j\,(13_j)$$

соответственно.

Учитывая, что функция $ax+b$ является решением уравнений (12_0) и (12_j), произвольные функции $\omega_0(x)$ и $\omega_j(x)$ $(j=1,2)$ можно подчинить условиям:

$$\omega_0(0) = \omega_0'(0) = 0, \,(14_0),$$

$$\omega_j(x_0) \;=\; \omega_j'(x_0) = 0 \qquad (j=1,2)\,(14_j)$$

Решение задачи Коши (13_0), (14_0)и (13_0), (14_j)$(j=1,2)$, соответственно, имеет вид:

$$\omega_0(x) = \sqrt{\mu_0}\int_0^x sh\sqrt{\mu_0}(x-t)\cdot\tau(t)\,dt, x \in \bar{J}_0, \qquad (15_0)$$

$$\omega_j(x) = (-1)^j\sqrt{-\mu_j}\int_{x_0}^x sh\sqrt{-\mu_j}(x-t)\cdot\tau(t)\,dt, x \in \bar{J}_j, \qquad (15_j)$$

где

$$\tau(x) \equiv \begin{cases} \upsilon_0(x,0) = \upsilon_1(x,0), & (x,0) \in \bar{J}_1, \\ \upsilon_0(x,0) = \upsilon_2(x,0), & (x,0) \in \bar{J}_2. \end{cases} (16)$$

В силу (1), (4), (5_j), (10_0), (10_j), (11_0), (11_j) задача $A\Gamma$ сведется к задаче $A\Gamma^*$ для уравнения

$$0 = L\upsilon \equiv \begin{cases} L\upsilon_0 & в \;\; \Omega_0 \\ L\upsilon_j & в \;\; \Omega_j \end{cases} (17)$$

с краевыми условиями

$$\upsilon(x,y)\big|_{AA_0} = \varphi_1(y), \quad \upsilon(x,y)\big|_{BB_0} = \varphi_2(y) - \omega_0(1), \quad 0 \le y \le h\,(18_0)$$

$$\upsilon(x,y)\big|_{AC_1}=\psi_1(x)-\omega_1(x),\qquad x\in\bar{J}_{11}\ (18_1)$$
$$\upsilon(x,y)\big|_{EC_2}=\psi_2(x)-\omega_2(x),\qquad x\in\bar{J}_{21}\ (18_2).$$

Здесь $\omega_0(x),\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ определяются из $(15_j)\,(j=0,1,2)$.

В силу решения задачи Коши [9] для уравнения (15_j) в области $\Omega_j\,(j=1,2)$ с учётом (18_j) имеем

$$\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)-\omega_1\left(\frac{x}{2}\right)=\gamma_1x^{1-2\beta}\Gamma(\beta)D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)-$$
$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta}\nu(x),\qquad x\in\bar{J}_1,\ (19_1)$$
$$\psi_2\left(\frac{x_0+x}{2}\right)-\omega_2\left(\frac{x_0+x}{2}\right)=\gamma_1(x-x_0)^{1-2\beta}\Gamma(\beta)D_{x_0x}^{-\beta}(x-x_0)^{\beta-1}\tau(x)-$$
$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{x_0x}^{\beta-1}(x-x_0)^{-\beta}\nu(x),\qquad x\in\bar{J}_2,\qquad (19_2)$$

где $\nu(x)=u_y(x,0),\ (x,0)\in J_j\ (j=1,2)$,

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\qquad \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-m}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},\qquad 2\beta=\frac{m}{m-2},$$

$D_{0x}^{-\alpha}[\cdot]$ и $D_{x_0x}^{-\alpha}[\cdot]$ - интегральные операторы дробного порядка $\alpha(\alpha>0)$ [11].

Применяя дифференциальные операторы $D_{0x}^{1-\beta}\ldots$ и $D_{x_0x}^{1-\beta}\ldots$ к обеим частям равенств $(19_j)\,(j=1,2)$ и используя формулы [11]:

$$D_{0x}^{1-\beta}D_{0x}^{\beta-1}\nu(x)=\nu(x),\ D_{x_0x}^{1-\beta}D_{x_0x}^{\beta-1}\nu(x)=\nu(x),$$
$$D_{0x}^{1-\beta}x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)=x^{-\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x),$$
$$D_{x_0x}^{1-\beta}(x-x_0)^{1-2\beta}D_{x_0x}^{-\beta}(x-x_0)^{\beta-1}\tau(x)=(x-x_0)^{-\beta}D_{x_0x}^{1-2\beta}\tau(x),$$

получим функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из области Ω_j на $I_j\,(j=1,2)$:

$$\nu(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)+\frac{x^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-\beta}\omega_1\left(\frac{x}{2}\right)-$$
$$-\frac{x^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-\beta}\psi_1\left(\frac{x}{2}\right),\qquad x\in J_1,\qquad (20_1)$$
$$\nu(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-2\beta}\tau(x)+\frac{(x-x_0)^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-\beta}\omega_2\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-$$
$$-\frac{(x-x_0)^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-\beta}\psi_2\left(\frac{x+x_0}{2}\right),\qquad x\in J_2,\qquad (20_2)$$

В силу условия 1) задачи $A\Gamma$, переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнении (12_0) и условия (18_0) с учётом (14_1) и (14_2), получим

$$\tau''(x)=x^{p}\nu(x)\ (x,0)\in J_1,(21_1)$$

$\tau(0)=\varphi_1(0)$, $\quad \tau(x_0)=0$; $\quad (22_1)$

$\tau''(x)=x^p\nu(x)\,(x,0)\in J_2,(21_2)$

$\tau(x_0)=0$, $\quad \tau(1)=\varphi_2(0)-\omega_0(1)$. (22_2)

Решая задачу (21_1) и $(22_1)((21_2)$ и $(22_2))$, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, перенесенное из области Ω_0 на $J_1(J_2)$:

$$\tau(x)=\int_0^{x_0}G_1(x,t)t^p\nu(t)dt+f_1(x), \qquad (x,0)\in\bar{J}_1\,(23_1)$$

$$\left(\tau(x)=\int_{x_0}^{1}G_2(x,t)t^p\nu(t)dt+f_2(x), \quad (x,0)\in\bar{J}_2\right), \qquad (23_2)$$

где

$$G_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)t}{x_0}, & 0\le t\le x,\\ \dfrac{(t-x_0)x}{x_0}, & x\le t\le x_0,\end{cases} \quad (24_1), \qquad G_2(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)(t-1)}{1-x_0}, & x_0\le t\le x,\\ \dfrac{(t-x_0)(x-1)}{1-x_0}, & x\le t\le 1,\end{cases} \quad (24_2)$$

$$f_1(x)=\varphi_1(0)-\frac{x}{x_0}\varphi_1(0), \qquad f_2(x)=\frac{x-x_0}{1-x_0}\left[\varphi_2(0)-\omega_1(1)\right]. \qquad (25)$$

Теперь переходим к доказательству единственности решения задачи $A\Gamma$. Справедливанижеследующая лемма.

Лемма 1. Если выполнены условия (2), (3), то задача $A\Gamma$ в области Ω не может иметь более одного решения.

Доказательство леммы 1

Пусть $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv\psi_1(x)\equiv\psi_2(x)\equiv 0$, тогда единственность решения задачи $A\Gamma$ вытекает из единственности решения задачи $A\Gamma^*$.

В работе [9] было доказано,что

$\tau(x)=0$, $\quad \forall x\in[0,1]$. (26)

Отсюда и из принципов экстремума для вырождающихся параболических и гиперболических уравнений [12], [13], [14] следует единственность решения задачи $A\Gamma^*$.

В силу (26), (11_j)из(15_j) $(j=0,1,2)$ получим

$$\omega(x)\equiv\omega_0(x)\equiv\omega_1(x)\equiv\omega_2(x)\equiv 0, \quad \forall x\in[0,1]. \qquad (27)$$

В силу (26) и (27) с учётом принципа экстремума для вырождающегося уравнения параболического типа (12_0) [12], [13] заключаем, что первая краевая задача с нулевыми граничными условиями не имеет отличного от нуля решения, т.е.

$$\upsilon_0(x,y)\equiv 0 \;\; в \;\; \bar{\Omega}_0. \qquad (28)$$

Из решения задачи Коши-Гурса с нулевыми данными (т.е. $\upsilon_1(x,y)|_{AC_1}=0,$ $\upsilon_1(x,y)|_{y=0}=0, \upsilon_2(x,y)|_{EC_2}=0, \quad \upsilon_2(x,y)|_{y=0}=0$) для уравнения (12_j) в области Ω_j следует, что

$$\upsilon_j(x,y)\equiv 0 \;\; в \;\; \Omega_j \;\; (j=1,2). \qquad (29_j)$$

В силу (28), (29_1), (29_2)из(10_j) $(j=0,1,2)$ имеем $\upsilon(x,y)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. (30)

Тем самым доказана единственность решения задачи $A\Gamma^*$ для уравнения (17).

Принимая во внимание (27), (30) из (9), имеем $u(x,y)\equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Отсюда следует единственность решения задачи $A\Gamma$ для уравнения (1).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если выполнены условия (2), (3), (7), (8_1) и (8_2), то в области Ω решение задачи $A\Gamma^*$ существует.

Доказательство. Исключая $\tau(x)$ из (19_j) и (23_j) $(j=1,2)$ с учётом (15_0), (15_1), (15_2), получим интегральное уравнение относительно $\nu(x)$:

$$\nu(x)+\int_0^{x_0} K_1(x,t)t^p\nu(t)dt=\Phi_1(x), \quad (x,0)\in J_1, \qquad (31_1)$$

$$\nu(x)+\int_{x_0}^{1} K_2(x,t)t^p\nu(t)dt=\Phi_2(x), \quad (x,0)\in J_2, \qquad (31_2)$$

где $K_j(x,t)$ и $\Phi_j(x)$ $(j=1,2)$ - известные функции.

В силу (2), (3), (7), (8_1) и (8_2) следует, что ядро и правая часть уравнения (31_j) допускают оценки

$$|K_j(x,t)|\le const, \quad (32_j)$$

$$|\Phi_j(x)|\le const|x-x_0|^{2\beta-1}. \quad (33_j)$$

На основании (7), (8_1) и (8_2) с учётом (33_j) заключаем, что $\Phi_j(x)\in C^2(J_j)$ и это функция может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to x_0$, а при $j=1$, $x\to 0$ и $j=1$, $x\to 1$ ограничено.

Отсюда и в силу (32_j) и (33_j) уравнение (31_j) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Согласно теории интегральных уравнений Фредгольма [15] и из единственности решения задачи $A\Gamma^*$ заключаем, что интегральное уравнение (31_j) однозначно разрешимо в классе $C^2(J_j)$, причем $\nu(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to x_0$, а при $j=1$, $x\to 0$ и при $j=2$, $x\to 1$ ограничено, и её решение даётся формулой

$$\nu(x)=\Phi_1(x)-\int_0^{x_0} K_1^*(x,t)\Phi_1(t)dt \quad (34_1)$$

при $j=1$,

$$\nu(x)=\Phi_2(x)-\int_{x_0}^{1} K_2^*(x,t)\Phi_2(t)dt \quad (34_2)$$

при $j=2$. Здесь $K_j^*(x,t)$ - резольвента ядра $K_j(x,t)$.

Подставляя (34_j) в (23_j) $(j=1,2)$, находим $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$.

Следовательно, задача $A\Gamma^*$ однозначно разрешима в силу эквивалентности ее интегральному уравнению Фредгольма второго рода (31_j).

Таким образом, решение задачи $A\Gamma^*$ можно восстановить в области Ω_0 как решение первой краевой задачи для уравнения (12_0) [16], а в Ω_j - как решение задачи Коши для уравнения (12_j) $(j=1,2)$.

Лемма 2 доказана.

В силу (23_j) и $(31_j)(j=1,2)$ из (15_i) $(i=0,1,2)$ определим функции $\omega_i(x)$. Тогда решение задачи $A\Gamma$ в области Ω_0 находится в виде

$$u(x,y)=\upsilon_0(x,y)+\omega_0(x),$$

где $\upsilon_0(x,y)$ - решение первой краевой задачи для уравнения (15_0) [13], [16], а в областях Ω_1 и Ω_2 в виде

$$u(x,y)=\upsilon_j(x,y)+\omega_j(x), \quad (j=1,2).$$

Здесь $\upsilon_j(x,y)$ - решение задачи Коши для уравнения (12_j) в области Ω_j $(j=1,2)$ [11].

Этим завершается исследование существования решения задачи $A\Gamma$ для уравнения (1). Теорема доказана.

REFERENCES

1. Naxushev A.M. Nagrujennie uravneniya i ix prilojeniya //Differentsialnie uravneniya. - 1983. - T.19. - № 1. - S. 86-94.
2. Lanina I.N. Kraevaya zadacha dlya odnogo nagrujennogo giperbolo-parabolicheskogo uravneniya tretego poryadka //Differentsialnie uravneniya. - 1981. - T.17. - № 1. - S. 97-106.
3. Yeleev V.A. O nekotorix kraevix zadachax dlya smeshennix nagrujennix uravneniy vtorogo i tretego poryadka //Differentsialnie uravneniya. - 1994. - T.30. - № 2. - S. 230-237.
4. Islomov B., Kurяzov D.M. Ob odnoy kraevoy zadache dlya nagrujennogo uravneniya vtorogo poryadka //Dokladi AN RUz. - 1996. - № 1-2. - S. 3-6.
5. Islomov B., Kurяzov D.M. Kraevie zadachi dlya smeshannogo nagrujennogo uravneniya tretego poryadka parabolo-giperbolicheskogo tipa //Uzbekskiy matematicheskiy jurnal. - 2000. - № 2. - S. 29-35.
6. Islomov B., Boltaeva U.I. Kraevaya zadacha dlya nagrujennogo uravneniya tretego poryadka s parabolo-giperbolicheskim operatorom //Uzbekskiy matematicheskiy jurnal. - 2007. - № 2.- S. 45-55.
7. Islomov B., Alikulov Ye. Otsenka resheniya analoga zadachi Trikomi dlya odnogo klassa nagrujennix uravneniy smeshannogo tipa //Materiali Mejdunarodnogo Rossiysko-Bolgarskogo simpoziuma «Uravneniya smeshannogo tipa i rodstvennie problemi analiza i informatiki». - Rossiya: Nalчik-Xabez. - 2010. - S. 101-104.
8. Kaziev V.M. O zadache Darbu dlya odnogo virojdayushegosya nagrujennogo integro-differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka //Differentsialnie uravneniya. - 1978. - T.14. - № 1. - S. 181-184.
9. Islomov B., Djuraev F. Analog zadachi Trikomi dlya virojdayushegosya nagrujennogo uravneniya parabolo-giperbolicheskogo tipa //Uzbekskiy matematicheskiy jurnal. - 2011. - № 2. - S. 75-85.
10. Salaxitdinov M.S. Uravneniya smeshanno-sostavnogo tipa. - T.: Fan,1974. - 156 s.
11. Smirnov M.M. Uravneniya smeshannogo tipa. - M.: Visshaya shkola, 1985. - 301 s.

12. Djuraev N. Ob odnoy kraevoy zadache dlya virojdayushegosya parabolo-giperbolicheskogo uravneniya vtorogo roda //Izvestiya AN Uz SSR. Seriya fiz.-mat.nauk. - 1988. - № 2. - S. 15-19.
13. Tersenov S.A. Vvedenie v teoriyu uravneniya, virojdayushegosya na granitse. - Novosibirsk: NGU, 1973. - 144 s.
14. Islomov B., Ochilova N.K. Ob odnoy kraevoy zadachi dlya uravneniya parabolo-giperbolicheskogo tipa s dvumya liniyami i razlichnimi poryadkami virojdeniya //Uzbekskiy matematicheskiy jurnal. - 2005. - № 3. - S. 43-51.
15. Mixlin S.G. Lektsii po lineynim integralnim uravneniyam. - M.: Fizmatgiz, 1959. - 232 s.
16. Tersenov S.A. Pervaya kraevaya zadacha dlya uravneniya parabolicheskogo tipa smenyayushimsya napravleniem vremeni. - Novosibirsk: NGU, 1978. - 53 s.