BULLETIN OF GULISTAN STATE UNIVERSITY

Volume 2019 | Issue 2 Article 3

6-29-2019

OPPOSITE MOTION IN IDEAL FLUID OF TWO ELONGATED ELLIPSOIDS OF ROTATION

A. Khakimov
Navoi State University

Z.T. Ismoilova
Navoi State University

S.X. Islikov
Gulistan State University

УДК 532.5

ВСТРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ДВУХ ВЫТЯНУТЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ ВРАЩЕНИЯ

А.Хакимов[1], З.Т.Исмоилова[1], С.Х.Исликов[2]
[1]Навоийский государственный педагогический институт, 210100, г.Навои, ул.Ибн Сино, 45.
[2]Гулистанский государственный университет, 120100, г.Гулистан.
E-mail: *s-islikov@inbox.uz*

Abstract

OPPOSITE MOTION IN IDEAL FLUID OF TWO ELONGATED ELLIPSOIDS OF ROTATION

A.Khakimov, Z.T.Ismoilova, S.X.Islikov

Oncoming movement in an ideal fluid of two elongated and ellipsoid of rotation. Solving the problem motion of two elongated ellipsoids of an infinite fluid in sentences, and what is a disturbed fluid flow potential.

Keywords: motion, ellipsoid, rotations, potential, speed, private differentiation.

Аннотация

ИККИ ЭЛАСТИК ПЛИТА ЭЛЛИПСИНИНГ ИДЕАЛ СУЮҚЛИГИДАГИ ТЕСКАРИ ҲАРАКАТИ

А.Хакимов, З.Т.Исмоилова, С.Х.Исликов

Мақолада идеал суюқликда икки марта айланувчи эллипсоидга қарши ҳаракат ўрганилган. Суюқликнинг бузилган оқимининг потенциал эканлигини таъкидлайдиган, жумладан, чексиз суюқликда икки узун эллипсоиднинг ҳаракати тўғрисидаги муаммолар ҳал қилинди.

Таянч сўзлар: ҳаракат, эллипсоид, айланиш, потенциал, тезлик, хусусий дифференциаллаш.

Аннотация

ВСТРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ДВУХ ВЫТЯНУТЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ ВРАЩЕНИЯ

А.Хакимов, З.Т.Исмоилова, С.Х.Исликов

В статье исследовано встречное движение в идеальной жидкости двух вытянутых эллипсоидов вращения. Решена задача о движении двух вытянутых эллипсоидов в безграничной жидкости в предложении, что возмущенное течение жидкости потенциальное.

Ключевые слова: движение, эллипсоид, вращения, потенциал, скорость, частного дифференцирования.

Постановка задачи. Пусть два одинаковых эллипсоида вращения движутся на встречных параллельных курсах с одинаковыми постоянными скоростями $\boldsymbol{U}$. Движение происходит в безграничной идеальной жидкости, причем вихри в области течения отсутствуют. Если рассматривать верхнюю половину течения (рис. 1) и считать, что верхние половины эллипсоидов схематизируют поезда, то данную модель можно интерпретировать как задачу об аэродинамическом взаимодействии поездов. Если же взять нижнюю половину течения, то приходим к задаче о взаимодействии судов, идущих встречными курсами при малых числах Фруда.

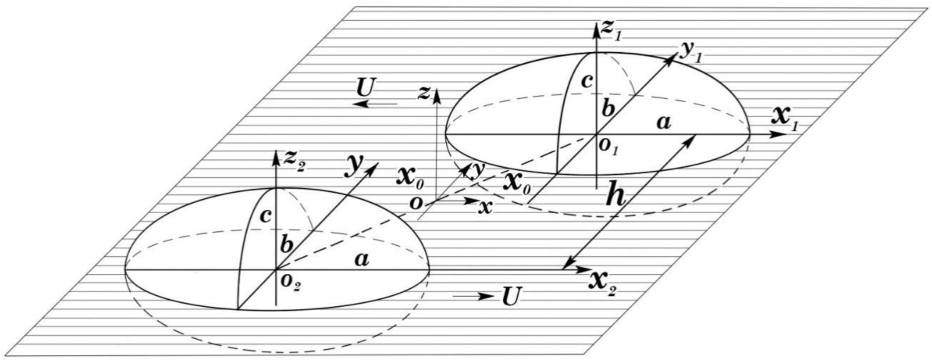

Рис. 1.

Очевидно, что картина течения должна быть симметричной относительно неподвижной точки ***O***, расположенной посредине между эллипсоидами. Поместив в этой точке начало неподвижной системы координат, выберем ось ***x*** параллельной направлению движения эллипсоидов, а ось ***z*** нормальной к плоскости ***xOy*** — плоскости «земли» (поверхности воды) . В рассматриваемой постановке потенциал скоростей течения $\boldsymbol{\varphi(x,y,z,t)}$ $\boldsymbol{\varphi(x,y,z,t)}$ должен быть гармонической функцией координат ***x, y, z*** и удовлетворять краевым условиям: покоя жидкости в бесконечности, непроницаемости и безотрывности течения на поверхностях эллипсоидов.

Центры эллипсоидов имеют координаты $\mathrm{O}_1\ (\mathrm{x}_0, y_0, o)$ $\mathrm{O}_1\ (\mathrm{x}_0, y_0, o)$ и $O_2\ (-\mathrm{x}_0, -y_0, \mathrm{o})$ $O_2\ (-\mathrm{x}_0, -y_0, \mathrm{o})$, причем $y_0 = \frac{h}{2} = \ const$ $y_0 = \frac{h}{2} = \ const$, а $\mathrm{x}_0 = -Ut$ $\mathrm{x}_0 = -Ut$. В силу симметрии течения относительно точки *O* в любой момент времени имеем соотношения:

$$v_x(x,y,z,t) = -v_x\ (-x,-y,-z,t)\ v_x(x,y,z,t) = -v_x\ (-x,-y,-z,t),$$

$$v_y(x,y,z,t) = -v_y(-x,-y,-z,t)\ v_y(x,y,z,t) = -v_y(-x,-y,-z,t),$$

(1.1)

$$v_z(x,y,z,t) = -v_z\ (-x,-y,-z,t)\ v_z(x,y,z,t) = -v_z\ (-x,-y,-z,t),$$

Отсюда, приняв $\varphi(x,y,z,t) = \ 0$ $\varphi(x,y,z,t) = \ 0$, интегрированием легко показать, что $\varphi(x,y,z,t)$ $\varphi(x,y,z,t)$ является четной функцией координат:

$$\varphi(x,y,z,t) = \varphi(-x,-y,-z,t)\ \varphi(x,y,z,t) = \varphi(-x,-y,-z,t)$$

(1.2)

Из условия $v_z(x,y,o,t) = 0$ $v_z(x,y,o,t) = 0$ на поверхности земли (воды) следует [1] другое соотношение симметрии

$$\varphi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,-z,t)\ \varphi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,-z,t).$$

(1.3)

Представление потенциала скоростей в рядах по функциям Лежандра. Свяжем с центрами эллипсоидов две подвижные системы координат (рис. 1)

$x_1 = x - x_0 = x + Ut \; x_1 = x - x_0 = x + Ut$; $y_1 = y - y_0$

$y_1 = y - y_0$; $z_1 = z \; z_1 = z$; (2.1)

$x_2 = x + x_0 = x - Ut \; x_2 = x + x_0 = x - Ut$; $y_2 = y + y_0$

$y_2 = y + y_0$; $z_2 = z \; z_2 = z$; (2.2)

и введем ортогональные криволинейные системы координат $\mu_i, \lambda_i, \omega_i (i = 1;2)$ $\mu_i, \lambda_i, \omega_i (i = 1;2)$ по формулам [2], [3]:

$x_i = k \cos\theta_i \, ch\eta_i = k\mu_i\lambda_i \; x_i = k \cos\theta_i \, ch\eta_i = k\mu_i\lambda_i$;

$y_i = r_i \cos\omega_i \; y_i = r_i \cos\omega_i$;

$z_i = r_i \cos\omega_i \; z_i = r_i \cos\omega_i$;

$$r_i = \sqrt{{y_i}^2 + {z_i}^2} = k \sin\theta_i \, sh\eta_i = k(1 - {\mu_i}^2)^{1/2}({\lambda_i}^2 - 1)^{1/2}$$

$$r_i = \sqrt{{y_i}^2 + {z_i}^2} = k \sin\theta_i \, sh\eta_i = k(1 - {\mu_i}^2)^{1/2}({\lambda_i}^2 - 1)^{1/2}$$, где

$-1 \le \mu_i = \cos\theta_i \le 1 \; -1 \le \mu_i = \cos\theta_i \le 1$; $\lambda_i = ch\eta_i \le 1 \; \lambda_i = ch\eta_i \le 1$.

Если уравнения (2.3) разрешить относительно новых координат, то будем иметь

$$\mu_i = \left(\sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 + 2x_i k} - \sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 - 2x_i k}\right)/2k$$

$$\mu_i = \left(\sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 + 2x_i k} - \sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 - 2x_i k}\right)/2k,$$

$$\lambda_i = \left(\sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 + 2x_i k} + \sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 - 2x_i k}\right)/2k$$

$$\lambda_i = \left(\sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 + 2x_i k} + \sqrt{k^2 + {x_i}^2 + {r_i}^2 - 2x_i k}\right)/2k, \quad (2.4)$$

Симметричным значениям декартовых координат соответствуют следующие условия симметрии для координат $\mu_i, \lambda_i, \omega_i \; \mu_i, \lambda_i, \omega_i$:

$$\mu_i(-x_i, -y_i, -z_i) = -\mu_i(x_i, y_i, z_i)$$

$$\mu_i(-x_i, -y_i, -z_i) = -\mu_i(x_i, y_i, z_i),$$

$$\lambda_i(-x_i, -y_i, -z_i) = -\lambda_i(x_i, y_i, z_i)$$

$$\lambda_i(-x_i, -y_i, -z_i) = -\lambda_i(x_i, y_i, z_i), \quad (2.5)$$

$$\omega_i(-x_i, -y_i, -z_i) = -\omega_i(x_i, y_i, z_i) \pm \pi$$

$$\omega_i(-x_i, -y_i, -z_i) = -\omega_i(x_i, y_i, z_i) \pm \pi;$$

$$\mu_i(x_i, y_i, -z_i) = \mu_i(x_i, y_i, z_i) \; \mu_i(x_i, y_i, -z_i) = \mu_i(x_i, y_i, z_i),$$

$$\lambda_i(x_i, y_i, -z_i) = \lambda_i(x_i, y_i, z_i)\ \lambda_i(x_i, y_i, -z_i) = \lambda_i(x_i, y_i, z_i),$$

(2.6)

$$\omega_i(x_i, y_i, -z_i) = -\omega_i(x_i, y_i, z_i)\ \omega_i(x_i, y_i, -z_i) = -\omega_i(x_i, y_i, z_i).$$

Заметим, что координатные поверхности $\lambda_i = const\ \lambda_i = const$ представляют собой эллипсоиды вращения с полуосями $a = k\lambda_i,\ b = c = k\left(\lambda_i{}^2 - 1\right)^{1/2}$ $a = k\lambda_i,\ b = c = k\left(\lambda_i{}^2 - 1\right)^{1/2}$:

$$\frac{x_i{}^2}{k^2\lambda_i{}^2} + \frac{y_i{}^2 + z_i{}^2}{k^2(\lambda_i{}^2 - 1)} - 1 = 0\ \frac{x_i{}^2}{k^2\lambda_i{}^2} + \frac{y_i{}^2 + z_i{}^2}{k^2(\lambda_i{}^2 - 1)} - 1 = 0.$$

(2.7)

Пусть рассматриваемым движущимся эллипсоидам соответствуют значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ причем величины $\lambda_0\ \lambda_0$ и к заданы. Отметим, что дифференциалы дуг вдоль координатныхлиний имеют вид:

$$ds_{\mu_i} = k\left(\frac{\lambda_i{}^2 - \mu_i{}^2}{1 - \mu_i{}^2}\right)^{1/2} d\mu_i\ ds_{\mu_i} = k\left(\frac{\lambda_i{}^2 - \mu_i{}^2}{1 - \mu_i{}^2}\right)^{1/2} d\mu_i,$$

$$ds_{\lambda_i} = k\left(\frac{\lambda_i{}^2 - \mu_i{}^2}{\lambda_i{}^2 - 1}\right)^{1/2} d\lambda_i\ ds_{\lambda_i} = k\left(\frac{\lambda_i{}^2 - \mu_i{}^2}{\lambda_i{}^2 - 1}\right)^{1/2} d\lambda_i,$$

(2.8)

$$ds_{\omega_i} = k(1 - \mu_i{}^2)^{1/2}(\lambda_i{}^2 - 1)^{1/2} d\omega_i$$

$$ds_{\omega_i} = k(1 - \mu_i{}^2)^{1/2}(\lambda_i{}^2 - 1)^{1/2} d\omega_i,$$

В монографии [3] подробно изложен вопрос о представлении в виде ряда по функциям Лежандра функции, гармонической вне изолированного эллипсоида вращения. Поскольку при суперпозиции потенциалов скоростей вне двух непересекающихся эллипсоидов меняются для каждого разложения лишь граничные условия на поверхностях эллипсоидов, то, обобщая представление [3], потенциал скоростей $\varphi\ \varphi$ можно записать в виде:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad (2.9)$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} P_n^s(\mu_1) Q_n^s(\lambda_1)[A_{n+1}^s \cos(s\omega_1) + B_{n+1}^s \sin(s\omega_1)]$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} P_n^s(\mu_2) Q_n^s(\lambda_2)[A_{n+2}^s \cos(s\omega_2) + B_{n+2}^s \sin(s\omega_2)]$$

где $P_n^s\ P_n^s$ и $Q_n^s\ Q_n^s$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода;

$P_n^0 = P_n$ $P_n^0 = P_n$ и $Q_n^0 = Q_n$ $Q_n^0 = Q_n$ — функции Лежандра первого и второго рода;

$A_{n,\ i}^s$, $_iB_{n,\ i}^s$ $A_{n,\ i}^s$, $_iB_{n,\ i}^s$ — постоянные, определяемые из граничных условий на поверхностях эллипсоидов.

Из условий симметрии (1.2) и (2.5) следует, что

$$A_{n,\ 1}^s = (-1)^n A_{n,2}^s = A_n^s \ A_{n,\ 1}^s = (-1)^n A_{n,2}^s = A_n^s,$$

(2.10)

$$B_{n,\ 1}^s = (-1)^n B_{n,2}^s = B_n^s \ B_{n,\ 1}^s = (-1)^n B_{n,2}^s = B_n^s,$$

Из условий (1.3) и (2.6) вытекает, что

$$B_n^s = 0 \ B_n^s = 0 \qquad (2.11)$$

На основе (2.8), (2.10) и (2.11) получается окончательное представление потенциала скоростей: (2.12)

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} A_n^s P_n^s(\mu_1) Q_n^s(\lambda_1)\cos(s\omega_1) + (-1)^n A_n^s P_n^s(\mu_2) Q_n^s(\lambda_2)\cos(s\omega_2)$$

Заметим, что методу Э. Л. Блоха и А. С. Гиневского [4] соответствует частныйслучайпредставления (2.12)при $n \le 2, s \le 1$ $n \le 2, s \le 1$.

Граничные условия. Поскольку в (2.12) учтены условия симметрии течения, то достаточно потребовать удовлетворения граничных условийна поверхности любого из эллипсоидов, например, на первом $(\lambda_1 = \lambda_0)$ $(\lambda_1 = \lambda_0)$. Нормальная скорость жидкости $\frac{d\varphi}{dn_1}$ $\frac{d\varphi}{dn_1}$ на поверхности этого эллипсоида должна равняться нормальной скорости его поверхности:

Поскольку дифференциал нормали dn_1 dn_1 равен $ds\lambda_1$ $ds\lambda_1$, а, согласно (2.7), $cos(n_1, x_1) = \mu_1(\lambda_0{}^2 - 1)^{1/2}/(\lambda_0{}^2 - \mu_1{}^2)^{1/2}$

$cos(n_1, x_1) = \mu_1(\lambda_0{}^2 - 1)^{1/2}/(\lambda_0{}^2 - \mu_1{}^2)^{1/2}$, то с учетом (2.8) граничное условие (3.1) можно преобразовать к виду:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda_1}\right)_{\lambda_1=\lambda_0} = -kU\mu_1 \ \left(\frac{d\varphi}{d\lambda_1}\right)_{\lambda_1=\lambda_0} = -kU\mu_1. \qquad (3.2)$$

В развернутой форме (3.2) записывается следующим образом: (3.3)

$$-kU\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} A_n^s P_n^s(\mu_1)\frac{dQ_n^s(\lambda_0)}{d\lambda_0}\cos(s\omega_1) + \left[\frac{d\varphi_2}{d\mu_2}\cdot\frac{d\mu_2}{d\lambda_1} + \frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}\cdot\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} + \frac{d\varphi_2}{d\omega_2}\cdot\frac{d\omega_2}{d\lambda_1}\right]_{\lambda_1=\lambda_0}$$

В уравнении (3.3) μ_1 μ_1 и ω_1 ω_1 считаются произвольными независимыми величинами. Процесс вычисления $d\varphi_2/d\mu_2$ $d\varphi_2/d\mu_2$, $d\varphi_2/d\lambda_2$ $d\varphi_2/d\lambda_2$, $d\varphi_2/d\omega_2$ $d\varphi_2/d\omega_2$

очевиден. Для нахождения $d\mu_2/d\lambda_1\, d\mu_2/d\lambda_1$, $d\lambda_2/d\lambda_1\, d\lambda_2/d\lambda_1$, $d\omega_2/d\lambda_1$ $d\omega_2/d\lambda_1$ нужно выразить $\mu_2,\lambda_2,d\omega_2\ \mu_2,\lambda_2,d\omega_2$ через $\mu_1,\lambda_1,d\omega_1\ \mu_1,\lambda_1,d\omega_1$ для чего следует воспользоваться формулами:

$$x_2 = x_1 + 2x_0\ x_2 = x_1 + 2x_0; \qquad y_2 = y_1 + 2y_0\ y_2 = y_1 + 2y_0;$$

$$z_2 = z_1; z_2 = z_1;$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda_1} = \frac{dx_1}{d\lambda_1} = k\mu_1\ \frac{dx_2}{d\lambda_1} = \frac{dx_1}{d\lambda_1} = k\mu_1; \quad \frac{dy_2}{d\lambda_1} = \frac{dy_1}{d\lambda_1} = \frac{k\lambda_1(1-\mu_1{}^2)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}}cos\omega_1$$

$$\frac{dy_2}{d\lambda_1} = \frac{dy_1}{d\lambda_1} = \frac{k\lambda_1(1-\mu_1{}^2)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}}cos\omega_1; \qquad (3.4)$$

$$\frac{dz_2}{d\lambda_1} = \frac{dz_1}{d\lambda_1} = \frac{k\lambda_1(1-\mu_1{}^2)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}}sin\omega_1\ \frac{dz_2}{d\lambda_1} = \frac{dz_1}{d\lambda_1} = \frac{k\lambda_1(1-\mu_1{}^2)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}}sin\omega_1;$$

Таким образом, учитывая (2.4), можно найти:

$$\frac{d\mu_2}{d\lambda_1} = \frac{d\mu_2}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{d\lambda_1} + \frac{d\mu_2}{dy_2}\cdot\frac{dy_2}{d\lambda_1} + \frac{d\mu_2}{dz_2}\cdot\frac{dz_2}{d\lambda_1} =$$

$$= \frac{1-\mu_1{}^2}{\lambda_1{}^2-\mu_1{}^2}\left[\lambda_2\mu_1 - \frac{\lambda_1\mu_2(1-\mu_1{}^2)^{1/2}(\lambda_2{}^2-1)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}(1-\mu_2{}^2)^{1/2}}\cos(\omega_2-\omega_1)\right]$$

$$= \frac{1-\mu_1{}^2}{\lambda_1{}^2-\mu_1{}^2}\left[\lambda_2\mu_1 - \frac{\lambda_1\mu_2(1-\mu_1{}^2)^{1/2}(\lambda_2{}^2-1)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}(1-\mu_2{}^2)^{1/2}}\cos(\omega_2-\omega_1)\right], \qquad (3.5)$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_2{}^2-1}{\lambda_2{}^2-\mu_2{}^2}\left[\mu_2\mu_1 + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-\mu_1{}^2)^{1/2}(1-\mu_2{}^2)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}(\lambda_2{}^2-1)^{1/2}}\cos(\omega_2-\omega_1)\right]$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_2{}^2-1}{\lambda_2{}^2-\mu_2{}^2}\left[\mu_2\mu_1 + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-\mu_1{}^2)^{1/2}(1-\mu_2{}^2)^{1/2}}{(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}(\lambda_2{}^2-1)^{1/2}}\cos(\omega_2-\omega_1)\right], \qquad (3.6)$$

$$\frac{d\omega_2}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_1(1-\mu_1{}^2)^{1/2}\sin(\omega_1-\omega_2)}{(1-\mu_2{}^2)^{1/2}(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}(\lambda_2{}^2-1)^{1/2}}\ \frac{d\omega_2}{d\lambda_1} = \frac{\lambda_1(1-\mu_1{}^2)^{1/2}\sin(\omega_1-\omega_2)}{(1-\mu_2{}^2)^{1/2}(\lambda_1{}^2-1)^{1/2}(\lambda_2{}^2-1)^{1/2}}.$$

(3.7)

Предположим теперь, что уравнение (3.3) удалось решить тем или иным приближенным способом, т. е. коэффициенты $A_n^s\ A_n^s$ в разложении (2.12) найдены в функции от x_0 . Тогда с помощью интеграла Лагранжа-Коши можнодавление в любой точке пространства, занятого жидкостью. Однако для этого, помимо скорости, необходимо знать еще и $d\varphi(x,y,z,t)/dt$ $d\varphi(x,y,z,t)/dt$ т. е. нужно предварительно найтипроизводные $\frac{dA_n^s}{dt} = -U\frac{dA_n^s}{dx_0}$

$\frac{dA_n^s}{dt} = -U\frac{dA_n^s}{dx_0}$ считая *x, y, z,* постоянными. Поскольку численное дифференцирование обладаетмалой точностью, можно рекомендовать определение $\frac{dA_n^s}{dt}\,\frac{dA_n^s}{dt}$ с помощью системы уравнений, которая получается путем •частного дифференцирования по $x_0\ x_0$ условия (3.3), однако при этом следует считать постоянными не *x, y, z,* а $\mu_1, \lambda_1, d\omega_1\ \mu_1, \lambda_1, d\omega_1$.

Случай вытянутых эллипсоидов при условии достаточной малости $\boldsymbol{b/y_0}\ \boldsymbol{b/y_0}$. Для вытянутых эллипсоидов из (2.7) и (2.3) следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 \approx 1; sin\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} sin\omega_1 = 0\left[\left({\lambda_1}^2 - 1\right)^{1/2}\right]; r_2 \approx y_2 = 2y_0 = h.$$

Рассматривая в (3.3) первые два слагаемых в квадрат ной скобке и учитывая (3.5) и (3.6), получим

$$\frac{d\varphi_2}{d\mu_2}\cdot\frac{d\mu_2}{d\lambda_1} + \frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}\cdot\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \phi(\mu_2,\lambda_2)\mu_1 + \psi(\mu_2,\lambda_2)\frac{(1-{\mu_1}^2)^{1/2}}{({\lambda_1}^2-1)^{1/2}}cos\omega_1$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\mu_2}\cdot\frac{d\mu_2}{d\lambda_1} + \frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}\cdot\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \phi(\mu_2,\lambda_2)\mu_1 + \psi(\mu_2,\lambda_2)\frac{(1-{\mu_1}^2)^{1/2}}{({\lambda_1}^2-1)^{1/2}}cos\omega_1$$

, (4.1)

$$\phi(\mu_2,\lambda_2) = \frac{1}{{\lambda_2}^2-{\mu_2}^2}\left[\lambda_2(1-{\mu_1}^2)\frac{d\varphi_2}{d\mu_2} + \mu_2({\lambda_2}^2-1)\frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}\right]$$

$$\phi(\mu_2,\lambda_2) = \frac{1}{{\lambda_2}^2-{\mu_2}^2}\left[\lambda_2(1-{\mu_1}^2)\frac{d\varphi_2}{d\mu_2} + \mu_2({\lambda_2}^2-1)\frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}\right]$$

; (4.2)

$$\psi(\mu_2,\lambda_2) = \frac{r_2}{k({\lambda_2}^2-{\mu_2}^2)}\left[\lambda_2\frac{d\varphi_2}{d\lambda_2} + \mu_2\frac{d\varphi_2}{d\mu_2}\right]$$

$$\psi(\mu_2,\lambda_2) = \frac{r_2}{k({\lambda_2}^2-{\mu_2}^2)}\left[\lambda_2\frac{d\varphi_2}{d\lambda_2} + \mu_2\frac{d\varphi_2}{d\mu_2}\right]$$

. (4.3)

Заметим, что в $\phi(\mu_2,\lambda_2)\ \phi(\mu_2,\lambda_2)$ и $\psi(\mu_2,\lambda_2)\ \psi(\mu_2,\lambda_2)$ сохранены только члены нулевого порядка относительно малой величины $\left({\lambda_1}^2-1\right)^{1/2}\left({\lambda_1}^2-1\right)^{1/2}$.

Вычисляя в принятом приближении последнее слагаемое в квадратных скобках (3.3), с помощью (3.7) получаем

$$\frac{d\varphi_2}{d\omega_2}\cdot\frac{d\omega_2}{d\lambda_1} = \Omega(\mu_2,\lambda_2)(1-{\mu_1}^2)(1-cos2\omega_1)$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\omega_2}\cdot\frac{d\omega_2}{d\lambda_1} = \Omega(\mu_2,\lambda_2)(1-{\mu_1}^2)(1-cos2\omega_1)$$

, (4.4)

где

$$\Omega(\mu_2,\lambda_2) = -\frac{k^2}{2h^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)A_n^s s^2 P_n^s(\mu_2)Q_n^s(\lambda_2).$$

$$\Omega(\mu_2,\lambda_2) = -\frac{k^2}{2h^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)A_n^s s^2 P_n^s(\mu_2)Q_n^s(\lambda_2).$$

(4.5)

Из (3.3) и (4.1) — (4.5) граничное условие получается окончательно в виде:

$$-kU\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} A_n^s P_n^s(\mu_1)\frac{dQ_n^s(\lambda_0)}{d\lambda_0}\cos(s\omega_1) + \phi(\mu_2,\lambda_2)\cdot\mu_1 + \Omega(\mu_2,\lambda_2)(1-{\mu_1}^2) + \psi(\mu_2,\lambda_2)\frac{(1-{\mu_1}^2)^{1/2}}{({\lambda_0}^2-1)^{1/2}}\times cos\omega_1 - \Omega(\mu_2,\lambda_2)(1-{\mu_1}^2)cos2\omega_1$$

$$-kU\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} A_n^s P_n^s(\mu_1)\frac{dQ_n^s(\lambda_0)}{d\lambda_0}\cos(s\omega_1) + \phi(\mu_2,\lambda_2)\cdot\mu_1 + \Omega(\mu_2,\lambda_2)(1-{\mu_1}^2) + \psi(\mu_2,\lambda_2)\frac{(1-{\mu_1}^2)^{1/2}}{({\lambda_0}^2-1)^{1/2}}\times cos\omega_1 - \Omega(\mu_2,\lambda_2)(1-{\mu_1}^2)cos2\omega_1$$

(4.6)

Коэффициенты при $\cos(s\omega_1)$ $\cos(s\omega_1)$ для s = 1, 2,... нужно приравнять нулю. Очевидно, что в нашем приближении при s>2 будет $A_n^s = 0$ $A_n^s = 0$. В силу этого для вытянутых, эллипсоидов при малых b/y_0 b/y_0 получается приближенное представление φ φ:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\mu_1)Q_n(\lambda_1) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n P_n(\mu_2)Q_n(\lambda_2) + \cos\omega_1\sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 P_n^1(\mu_1)Q_n^1(\lambda_1) + \cos\omega_2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n^1 P_n^1(\mu_2)Q_n^1(\lambda_2) + \cos2\omega_1\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2 P_n^2(\mu_1)Q_n^2(\lambda_1) + \cos2\omega_2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n A_n^2 P_n^2(\mu_2)Q_n^2(\lambda_2).$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\mu_1)Q_n(\lambda_1) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n P_n(\mu_2)Q_n(\lambda_2) + \cos\omega_1\sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 P_n^1(\mu_1)Q_n^1(\lambda_1) + \cos\omega_2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n^1 P_n^1(\mu_2)Q_n^1(\lambda_2) + \cos2\omega_1\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2 P_n^2(\mu_1)Q_n^2(\lambda_1) + \cos2\omega_2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n A_n^2 P_n^2(\mu_2)Q_n^2(\lambda_2).$$

(4.7)

Список литературы:

1. Седов Л. И. О неустановившемся движении внутри жидкости тела вращения// «Труды ЦАГИ», М., 1940, вып. 515.
2. Ламб Г. Гидродинамика (пер. с англ.).- М.-Л., 1947.
3.Гобсон Е. В Теория сферических и эллипсоидальных функций (пер. с англ.). - М., Изд. иностр. лит. 1952.
4.Гуревич М.И., Верников Г.И. Аэродинамическое давление на стенку вызванное движением скоростного поезда //«Изв. АН СССР, МЖГ», 1967, № 4.
5. Хакимов А., Кушмуротов У.И., Тоштемирова К. Симметричный вход поезда конечной длины в туннель / «Актуальные вопросы комплексного анализа». - Ташкент,19-21 сентября 2013 года.